3/11/09

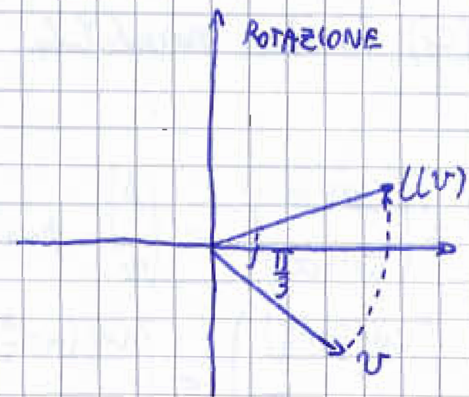
LIBRO GEOMETRIA B

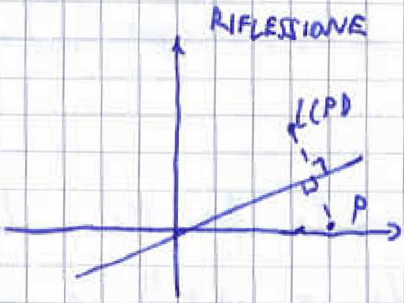
No cap. 1,2.
No compitini.

ROTAZIONI E RIFLESSIONI (CAP. 1)

Il prodotto di matrici corrisponde la composizione di applicazioni lineari: $A^3 = A \cdot A \cdot A$ – $L^3 = L \circ L \circ L$

Sia A una matrice 2x2 ortogonale ($A \in O(2)$) e sia L l'applicazione lineare associata.
L è sempre una rotazione e/o una riflessione (rispetto a una retta)





$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma a, b, c, d devono soddisfare l'ortogonalità: $A^T \cdot A = I_2$

Osservazione: se A è ortogonale, $\forall v, w$ vale $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$
Dimostrazione: $\underbrace{(A \cdot v)^T}_{\text{vettore colonna}} \cdot (A \cdot w) = v^T \cdot \underbrace{A^T \cdot A}_{I_d} \cdot w = v^T \cdot w = \langle v, w \rangle$

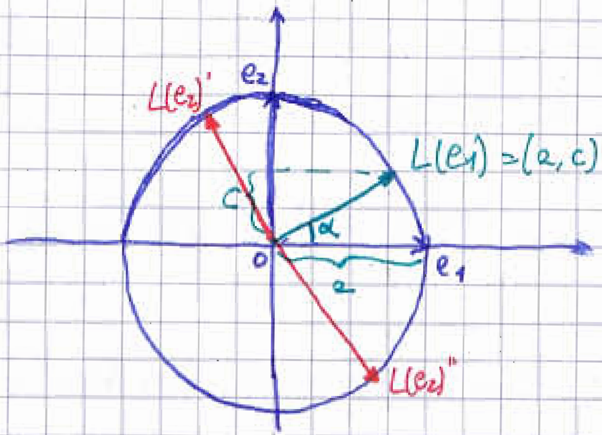
Dunque:
1) se $v \perp w$, allora $Av \perp Aw$ (L li sposta tenendoli ortogonali)
2) $\|Av\| = \|v\| \quad \forall v$

Questo vale anche in dimensione n.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = L(e_1) \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = L(e_2)$$

M_1 e_1 ed e_2 sono vettori di lunghezza 1 dunque anche $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sono vettori di lunghezza 1 $(a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1)$

L'origine deve rimanere la stessa sia per e_1 che per $L(e_1)$...



M_2: $e_1 \perp e_2$, dunque $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$; dato $L(e_1)$ ho due possibilità per $L(e_2)$.

Sia α l'angolo fra e_1 e $L(e_1)$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ può avere angolo o $\alpha + \frac{\pi}{2}$ o $\alpha - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice può essere:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \det A_2 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

Il determinante di una matrice ortogonale deve avere modulo 1.

Le matrici di tipo A_1 rappresentano ROTAZIONI di angolo α.
Le matrici di tipo A_2 rappresentano RIFLESSIONI intorno a una retta passante per l'origine, di angolo $\frac{\alpha}{2}$.

Dimostrazione nel caso delle rotazioni (altre sul libro da sapere):
Noto che L è una rotazione se $L(0)=0$, e $\forall v,w$ tiene fisso l'angolo fra v e w, cioè $\widehat{vw}=\widehat{L(v)L(w)}$. Inoltre l'angolo fra v e $L(v)$ resta fisso (α nel disegno).

Calcolo l'angolo tra v e $L(v)$:

$v(x_1,x_2)$

$$L(v)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha\\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\cos\widehat{vL(v)}=\frac{\langle v,L(v)\rangle}{\|v\|\cdot\|L(v)\|}=\frac{x_1(x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha)+x_2(x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha)}{\|v\|^2}=$$

$$=\frac{x_1^2\cos\alpha-\cancel{x_1x_2\sin\alpha}+\cancel{x_1x_2\sin\alpha}+x_2^2\cos\alpha}{x_1^2+x_2^2}=\frac{\cos\alpha\,\cancel{(x_1^2+x_2^2)}}{\cancel{x_1^2+x_2^2}}=\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{vL(v)}=\alpha \quad ▨$$

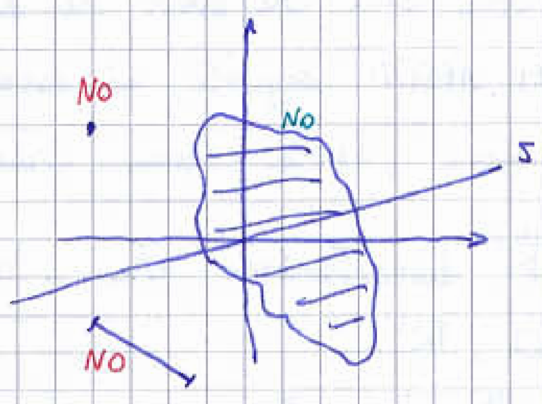
SPAZI VETTORIALI (CAP. 3)

Partiamo con alcuni esempi: R^n, $M(m\times n)$

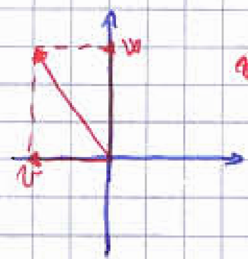
SOTTOSPAZI VETTORIALI DI R^n (cap. 8.15 geometria A)

Def. $W\subseteq\mathbb{R}^n$ non vuoto si dice sottospazio vettoriale (o lineare) di $\mathbb{R}^n$ se

1) $\forall v,w\in W$, $v+w\in W$
2) $\forall v\in W$ e $\forall k\in\mathbb{R}$, $kv\in W$
3) $0\in W$



Se considero gli assi coordinati noto che le condizioni 2 e 3 sono rispettate, ma la 1 no:



$v+w \notin W$

Nel piano $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali solo:
- le rette passanti per l'origine
- 0, $\mathbb{R}^2$ (sottospazi impropri o banali).

ESEMPI IMPORTANTI (8.17 libro A)

1) In $\mathbb{R}^3$ $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$ (piano $z=0$) dire se è SSV di $\mathbb{R}^3$

Dimostrazione:

- $0 \in W$? <u>SI</u> perché $0=(0,0,0)$ ha $x_3 = 0$
- se $v \in W$, $kv \in W$? $v(x_1, x_2, 0) \Rightarrow kv(kx_1, kx_2, 0)$ <u>SI</u> ha $x_3 = 0$
- se $v, u \in W$, $v+u \in W$? $\begin{matrix} v=(x_1, x_2, 0) \\ u=(y_1, y_2, 0) \end{matrix} \Rightarrow v+u = (x_1+y_1, x_2+y_2, \underset{0}{\underset{\uparrow}{0+0}}) \in W$ <u>SI</u>

ESERCIZIO PER CASA: scrivere l'equazione di un piano passante per l'origine e poi dimostrare che si tratta di un SSV.

ESERCIZIO PER CASA: idem con una retta in equazione cartesiana nello spazio, passante per l'origine.

La vera teoria che serve dal punto di vista geometrico è quella degli SPAZI AFFINI composti, ad esempio, dalle rette non passanti per l'origine (basta una traslazione).

In $\mathbb{R}^3$ dimostreremo che i sottospazi vettoriali sono
- 0, $\mathbb{R}^3$
- rette passanti per l'origine

2) $\forall A \in M_{m\times n}$, le soluzioni $Sol(A|0)$ è un SSV di $\mathbb{R}^n$.
Se dimostro questo so che tutti i $Ker(L)$ (nuclei) delle applicazioni lineari sono SSV.

Dimostrazione:

- $0 \overset{?}{\in} Sol(A|0) \rightarrow Sol(A|0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ SI infatti $A \cdot 0 = 0$
- Se $x \in Sol(A|0)$, $Kx \overset{?}{\in} Sol(A|0) \rightarrow A(Kx) = K\underbrace{(Ax)}_{0} = K \cdot 0 = 0$ SI
- Se $x \in Sol(A|0)$ e $y \in Sol(A|0)$, $x+y \overset{?}{\in} Sol(A|0)$

$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$ SI ∎

OSSERVAZIONE: una retta passante per l'origine infatti è $Sol(A|0)$ vista in equazione cartesiana.

es. $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$ $\quad A_{2\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Piani: es. $3x - y + z = 0 \quad (3, -1, 1) \in M_{1\times 3}$

$Sol(A|0)$ con $A \in M_{4\times 3}$: cos'è? È un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
Chi è geometricamente?

3) $\forall$ scelta di $v_1, \dots, _k \in \mathbb{R}^n$, $\underset{\{x_1 v_1 + \dots + x_k v_k\}}{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)}$ è SSV di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione:

- $0 \overset{?}{\in} \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow (0v_1 + \dots + 0v_k) = 0 \Rightarrow$ SI
- Se $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$, $kw \overset{?}{\in} \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$

$kw = k(x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = (kx_1)v_1 + \dots + (kx_k)v_k$ SI
- Se $w, u \in \mathcal{L}(v_1, \dots v_k)$, $w + u \overset{?}{\in} \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$

$w = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k \qquad u = y_1 v_1 + \dots + y_k v_k$

$w+u=(x_1+y_1)v_1+\ldots+(x_n+y_n)v_n$ S1

DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE SU CAMPO K

Premessa: un campo è un modo algebrico con cui trattare gli oggetti astratti come numeri, con le relative proprietà.
I campi K che useremo sono $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Uno spazio vettoriale V sul campo K è un insieme non vuoto dotato di due operazioni (funzioni):
- la somma $\overset{(+)}{s}: V\times V \longrightarrow V$
- la moltiplicazione per scalare $\overset{(\cdot)}{p}$ $K\times V \rightarrow V$

che soddisfano le seguenti proprietà:

(S1) la somma è commutativa: $\forall v,w\in V$, $v+w=w+v$

(S2) la somma è associativa: $\forall v,w,u\in V$, $v+(w+u)=(v+w)+u$

(S3) $\exists\, 0\in V$ tale che $v+0=v$ $\forall v\in V$; inoltre $\forall v\in V, \exists (-v)\in V$ tale che $v+(-v)=0$

(P1) Associatività: $a\cdot(b\cdot v)=(a\cdot b)\cdot v$ $\forall a,b\in K$, $\forall v\in V$

(P2) $1\in K$ agisce come l'identità, cioè $1\cdot v=v$ $\forall v\in V$

(P3) Proprietà distributive
- $(a+b)\cdot v=a\cdot v+b\cdot v$ $\forall a,b\in K$, $\forall v\in V$
- $a(v+w)=a\cdot v+a\cdot w$ $\forall a\in K$, $\forall v,w\in V$

Gli elementi dello spazio vettoriale si chiamano vettori.

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$M_{m\times n}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

ESAME: compito scritto dove c'è praticamente tutto. Orale facoltativo se voto ≥ 18.

SPAZI VETTORIALI, SOTTOSPAZI VETTORIALI, ISOMORFISMI, APPLICAZIONI LINEARI

↳ insieme non vuoto che ha certe proprietà sul campo K (bacino da cui si prendono i numeri per moltiplicare). Ha due operazioni:

$+ : V \times V \to V$ $\quad v+w$ gode delle proprietà commutativa,
$(v,w) \to v+w$ $\quad$ associativa, esistenza del vettore nullo 0

$v - w = v + (-w)$

$\cdot : K \times V \to V$ $\quad$ K è reale o complesso.
$(k, v) \to k \cdot v$

↳ MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE (NON prodotto scalare)

ESEMPIO FONDAMENTALE: $\mathbb{R}^n$ è spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

Def: un sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale V sul campo è un sottoinsieme W di V tale che:

1) se w_1 e $w_2 \in W$, allora $w_1 + w_2 \in W$
2) se $w \in W$ e $k \in K$, allora $kw \in W$
3) $0_V \in W$

Si dice che un SSV è chiuso rispetto alle operazioni.

Osservazione: i sottoinsiemi di V che sono spazi vettoriali sono esattamente i suoi sottospazi vettoriali.

Devo verificare che la somma da $W \times W$ vada in W, quindi che il codominio sia giusto, perché le proprietà sicuramente valgono, essendo

W un sottoinsieme di V e in V le proprietà valgono.

Def: Siano U e V spazi vettoriali sul campo K. Un ISOMORFISMO fra V e U è una mappa biettiva $f: V \to U$ che conserva (è compatibile con) le operazioni, cioè:

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2) $f(kv) = k f(v) \quad \forall v \in V, \forall k \in K$

Se $f: V \to U$ conserva le operazioni (non biettiva) è detta OMOMORFISMO o APPLICAZIONE LINEARE (o OPERATORE se $V = U$).

Osservazione: le due condizioni si possono riassumere in

$$f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2) \qquad \forall a, b \in K, \; \forall v_1, v_2 \in V$$

ESEMPI

0. $\mathbb{R}^n$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{C}^n$ è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Si dimostra come per $\mathbb{R}^n$ con la definizione di S.V., usando le proprietà dei numeri complessi

PROBLEMA: $\mathbb{R}^n$ è anche S.V. su $\mathbb{C}$? NO $\quad \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e questo è falso.

es: $(i, (1,0)) \to (i, 0) \notin \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^n$ è anche S.V. su $\mathbb{R}$? SI

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$a \cdot (z_1, \dots, z_n) = (a z_1, \dots, a z_n) \in \mathbb{C}^n$$

ESEMPIO: $\mathbb{C}$ (ovvero $\mathbb{C}^1$) è dunque spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Considero $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ entrambi visti come s.v. su $\mathbb{R}$

$(a, b) \to z = a + ib$ è un isomorfismo di s.v.

infatti è ovviamente biettiva; conserva le operazioni:

$v_1 = (a, b) \quad v_2 = (c, d) \quad v_1 + v_2 = (a + c, b + d)$

$f(v_1) + f(v_2) = a + ib + c + di = (a + c) + i(b + d) = f(v_1 + v_2)$ OK

$k \in \mathbb{R}$ $v=(a,b)$ $f(kv)=ka+ikb$ $kf(v)=k(a+ib)=ka+ikb$ ok

2. Le MATRICI: $M_{m\times n}$ (le matrici reali $m\times n$) formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$\left.\begin{array}{l} M(m\times n,\mathbb{R}) \text{ è s.v. su } \mathbb{R} \\ M(m\times n,\mathbb{C}) \text{ è s.v. su } \mathbb{C} \end{array}\right\} M(m\times n, K) \text{ è s.v. di } K$

ESEMPIO

$GL(n,K) = \{A \in M(n\times n,K) \mid A \text{ è invertibile, ovvero } \det A \neq 0\}$

↳ GRUPPO GENERALE LINEARE.

Sono uno spazio vettoriale su K? NO

Ovvero sono un sottospazio vettoriale di $M(n\times n,K)$? NO perchè non contengono ~~il vettore~~ la matrice nulla.

ESERCIZIO: dimostrare che le matrici diagonali sono un s.s.v. di $M(n\times n,K)$

3. L'ambiente delle funzioni $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che chiamo $\mathcal{F}$.

NOTA: $\mathcal{F}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si verifica con la definizione

$+: \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ tale che * $f+g=g+f$ VERA poichè $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=$

$(f,g)\to f+g$ * $(f+g)+h=f+(g+h)$ $= g(x)+f(x)=(g+f)(x)$

↑numeri reali

* 0 è la funzione nulla ovvero la costante 0.

* $-f$ esiste

$\cdot: \mathbb{R}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ tale che valgono le proprietà:

$(a,f)\to af$ * $a(f+g)=af+ag$ ... (distributive)

quindi $\mathcal{F}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Sottospazi (e non) di $\mathcal{F}$.

1. I polinomi: $\mathbb{R}[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\}$ con $a_0,a_1,\ldots\in\mathbb{R}$.

$n\to$ grado del polinomio

È un SSV di $\mathcal{F}$.

dim. • $0 \overset{?}{\in} \mathbb{R}[x]$ sì poiché la costante 0 è un polinomio (con coefficienti $a_0, a_1, \dots = 0$). Per convenzione ha grado $-\infty$.

• se $a \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in \mathbb{R}[x] \overset{?}{\Longrightarrow} a \cdot p(x) \in \mathbb{R}[x]$

sì infatti $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$a p(x) = a a_0 + a a_1 + \dots a a_n x^n$$

che è ancora un polinomio

• se $p, q \in \mathbb{R}[x] \overset{?}{\Longrightarrow} p+q \in \mathbb{R}[x]$

sì infatti $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

$$(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) x^n + \dots + b_m x^m \in \mathbb{R}[x]$$

2. I polinomi di grado 3 sono un SSV di $\mathcal{F}$ (o di $\mathbb{R}[x]$)?
NO perché manca il vettore nullo (ha grado $-\infty \neq 3$, quindi non appartiene all'insieme).

3. I polinomi di grado 3 e il vettore nullo sono un SSV?
NO : 3) ok (c'è 0)

2) $k \in \mathbb{R}, p \in W \Rightarrow kp \in W$ OK

1) $p, q \in W \Rightarrow p+q \in W$ NO esempio

$$p = x^3 + x^2 - 5$$
$$q = -x^3 + 3x^2 + x$$
$$p+q = 4x^2 + x - 5 \notin W$$

ESEMPI DI APPLICAZIONI LINEARI E ISOMORFISMI

0. Ogni matrice $A \in M(m \times n, K)$ dà una applicazione lineare $L_A : K^n \longrightarrow K^m$, con la formula $L_A(x) = A \cdot x$

1. Su $\mathcal{F}$, su $\mathbb{R}[x]$, ... la derivazione $\frac{d}{dx}$ è una applicazione lineare

Infatti $\frac{d}{dx} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ è lineare perché

1) $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$

2) $\frac{d}{dx}(kf) = k \frac{d}{dx} f$, se $k \in \mathbb{R}$

Infatti $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ è lineare perché $\frac{d}{dx}(p(x))$ è ancora un polinomio

$\mathbb{R}_n[x] = \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq n \}$ è un SSV di $\mathbb{R}[x]$.

$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ è una applicazione lineare? Dominio e codominio sono giusti? <u>SI</u>

$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ è una applicazione lineare? SI

Quali di questi sono isomorfismi (biettive)? Nessuna perché la derivata non è <u>mai</u> iniettiva. x^2 e x^2+1 sono diversi ma hanno la stessa derivata!

Ora, consideriamo su uno spazio vettoriale V sul campo K le nozioni di generatori, linearmente dipendenti / indipendenti, base.

Def: Siano $(v_1, \dots, v_n)$ vettori di V.

1) si dice che $v \in V$ è COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, \dots, v_n$ se $\exists\, a_1, \dots, a_n \in K$ tale che $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

2) $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \{ a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \}$ è lo SPAZIO GENERATO

OSS. $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ è un SSV di V

3) $(v_1, \dots, v_n)$ si dicono GENERATORI di V se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$

4) $(v_1, \dots, v_n)$ sono detti LINEARMENTE INDIPENDENTI se ogni volta che vale $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ i c_j sono zero.

5) $(v_1, \dots, v_n)$ sono detti LINEARMENTE DIPENDENTI se $\exists$ una combinazione lineare $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ con uno dei $c_i \neq 0$

6) $(v_1, \dots, v_n)$ sono una BASE di V se sono generatori di V e sono linearmente indipendenti.

Esistono degli spazi vettoriali in cui non esistono basi!?!

ESEMPIO:

$\mathbb{R}[x]$, cioè l'insieme dei polinomi, non ha una base.

Se $\mathbb{R}[x]$ avesse una base $(p_1, \dots, p_n)$ (p_1 di grado $d_1, \dots, p_n$ di grado d_n), scelgo il più grande, lo chiamo d.

Come posso scrivere x^{d+1} come combinazione lineare di $p_1, \dots, p_n$?

$$x^{1001} \stackrel{?}{=} a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n \underset{x^{1000}}{\underbrace{p_n}} \qquad \text{assurdo!!}$$

Non riesco ad alzare il grado con somme.

10/11/2009

Ci sono sempre due sottospazi banali: V stesso e $\{0\}$ lo spazio nullo

Mi chiedo: dato che $Sol(A|0)$ è sottospazio vettoriale di K^n, anche $Sol(A|b)$ è sottospazio vettoriale di K^n, con $b \neq 0$? NO

Infatti " $\{x \in K^n \mid A \cdot x = b\} \not\ni 0$ perché $A \cdot 0 = b$ non vera.

$Hom(V, W)$ è l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V a W.

$Hom(V, W)$ è uno spazio vettoriale.

In particolare $Hom(V, K)$ è lo spazio vettoriale duale di V e si indica con V^*. I suoi elementi sono detti FUNZIONALI.

Def: $(v_1, \dots, v_n)$ sono una base di V se sono linearmente indipendenti e generano V. n è detta la dimensione di V (numero di vettori che forma una sua base).

ES. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ poichè $\mathcal{E}(e_1, e_2)$ c'è la base canonica.

OSSERVAZIONE: $\{0\} = 0$ lo spazio vettoriale nullo non ha basi, poichè contiene solo il vettore nullo che è dipendente.
Per convenzione diremo che una sua base è l'insieme vuoto e dunque la sua dimensione è 0.

OSS. ci sono degli spazi vettoriali che non hanno basi, ma sono $\neq 0$

ESEMPI

- $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n: base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$
- $\mathbb{C}^n$ ha dimensione n: base canonica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$

Nella base non devo mettere numeri complessi perchè $\mathbb{C}^n$ è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e quindi i numeri complessi li posso usare come coefficienti: $v = (z_1, \dots, z_n) = z_1 \underbrace{(1,0,0\dots0)}_{e_1} + z_2 \underbrace{(0,1,0\dots0)}_{e_2} + \dots + z_n \underbrace{(0,0,\dots,1)}_{e_3}$

- $M(m\times n, K)$ ha base canonica $\mathcal{E} = (e_{ij})$

esempio: $M(2\times3, K) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{11}} + a_{12} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{e_{12}} +$

$+ a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le 6 matrici e_{ij} generano $M(2\times3, K)$ e sono linearmente indipendenti infatti:

$x_1 e_{11} + x_2 e_{12} + x_3 e_{13} + x_4 e_{21} + x_5 e_{22} + x_6 e_{23} = 0$

$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

vera solo se ogni $x_j = 0$.

$\Rightarrow$ è una base, detta la BASE CANONICA di $M(2\times3, K)$ ed esso ha dimensione 6.

$\Rightarrow$ $M(m\times n, K)$ in generale ha base canonica $\mathcal{E} = (e_{ij})$ ha dimensione $m \cdot n$.

- $\mathbb{R}_n[x]$ ha come base canonica $\mathcal{E} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ e quindi ha dimensione $n+1$.

$\begin{pmatrix} \mathbb{R}[x] \text{ ha dimensione infinita} \\ \mathcal{F} \quad '' \quad '' \quad '' \end{pmatrix}$

Quindi $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

dim: * Sono generatori, infatti $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

* Sono linearmente indipendenti:

sia $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n = \mathcal{O}$ una combinazione lineare nulla.

Devo mostrare che ognuna delle a_j è 0.

$\mathcal{O}$ è il polinomio nullo, dunque lo posso scrivere così:

$$\mathcal{O}(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

Per il principio di identità dei polinomi, $a_j = 0 \quad \forall j$

ISOMORFISMO CON $\mathbb{R}^n$

Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Allora $\forall v \in V$, vale che

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{(generatori)}$$

e le x_j sono uniche, in quanto i vettori v_j sono linearmente indipendenti; dunque posso parlare delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$.

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \in \mathbb{R}^n$$

ESEMPIO: $p(x) = 3 - x + 5x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ho così costruito una funzione, che chiamo

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longrightarrow [v]_{\mathcal{B}}$$

che trasforma un vettore in una n-upla di numeri.

Osservo che φ_B è biettiva.

Dimostro:

* INIETTIVA: siano $v, w \in V$ con $\varphi_B(v) = \varphi_B(w)$, devo dimostrare che $v=w$.

$$\left.\begin{array}{l} v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \\ w = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \end{array}\right\} \Longrightarrow v = w$$

* SURIETTIVA: sia $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, devo trovare $v \in V$ tale che

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \text{ è il } v \text{ cercato}$$

Osservo che φ_B è una applicazione lineare

$$\varphi_B(v+w) \overset{?}{=} \varphi_B(v) + \varphi_B(w)$$

$$\varphi_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ cioè } v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

$$\varphi_B(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ cioè } w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$$

$$v+w = (x_1+y_1) v_1 + \ldots + (x_n+y_n) v_n \text{ ovvero } \varphi_B(v+w) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

Dunque: φ_B è un ISOMORFISMO fra V e K^n.

Perciò tutto ciò che vale su K^n, vale su uno spazio vettoriale di dimensione n.

TEOREMI

1. Se V è uno spazio di dimensione finita, allora ogni base ha lo stesso numero di vettori

   dim: ciò vale in K^n, e uso l'isomorfismo φ_B.

2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, allora il numero dei suoi generatori è sempre $\geq n$, mentre il numero di vettori linearmente indipendenti è sempre $\leq n$.

dim: come sopra.

ES. In uno spazio di dimensione 5 $(\mathbb{R}^5, \mathbb{C}^5, M_{5\times1}, \mathbb{R}^4[x] \ldots)$ 3 vettori non possono essere generatori, possono (non devono) essere lin. indip.

3. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, n generatori sono una base, e n vettori linearmente indipendenti sono una base.

dim: come sopra.

4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un suo sottospazio
   * W ha una base e $\dim W \leq \dim V$
   * se $\dim W = \dim V$, allora $V = W$

In $\mathbb{R}^2$ i sottospazi devono avere dimensione 1, altrimenti devono coincidere con $\mathbb{R}^2$ (se dim=2).
$\mathcal{F}$ ha dimensione infinita (da *) $\mathcal{F} \supseteq \mathbb{R}[x]$.

DEFINIZIONE: Sia V uno spazio vettoriale e U, W suoi sottospazi
* $U+W = \{v \in V \mid v = u + w, \text{ con } u \in U, w \in W\}$
* si dice che $V = U \oplus W$ (somma diretta) se $V = U+W$ e $U \cap W = \{0\}$

Osservazione: parto da due sottospazi vettoriali U, W posso fare $U \cap W$: esso è ancora un S.S.V. Ma l'unione non va! Ovvero non sempre $U \cup W$ è un S.S.V.

$U \cup W$ non è un SSV

Invece dell'unione si usa la somma: $U+W$. In questo esempio $U+W=$

TEOREMA

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W suoi sottospazi.
* Se $V = U \oplus W$, allora una base V si ottiene mettendo assieme una base di U con una di W, e dunque $\dim V = \dim U + \dim W$
** In generale vale la FORMULA DI GRASSMANN

FORMULA DI GRASSMANN $\to$ $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

- Dimostro solo la *:

Siano $(u_1, \dots, u_m)$ una base di U, e $(w_1, \dots, w_s)$ una base di W

Considero $B = (u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_s)$: voglio dimostrare che è base di V

- generano : sia $v \in V \Rightarrow v = u + w = (a_1 u_1 + \dots + a_m u_m) + (b_1 w_1 + \dots + b_s w_s)$ ok

- linearmente indipendenti

Sia $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots b_s w_s = 0$ devo dimostrare $a_j = 0$ $b_j = 0$

$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = -b_1 w_1 - \dots - b_s w_s \in U \cap W \underset{Hp}{=} \{0\}$

dunque. $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0 \Rightarrow a_j = 0$ perché le u_j formano una base di U

$-b_1 w_1 - \dots - b_s w_s = 0 \Rightarrow b_j = 0$ perché le w_j formano una base di W

16/11/09

SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA n

Teorema: sia V uno s.v. sul campo K di dimensione n, e sia W un suo sottospazio vettoriale

1) W ha una base e $\dim W \leq n$

2) se $\dim W = \dim V$, allora $W = V$

<u>dimostrazione</u>

* se $W = 0$, una sua base è il vuoto e $\dim W = 0 \leq n$

* se $W \neq 0$, sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$; considero $\mathcal{L}(w_1)$

** $\mathcal{L}(w_1) = W$ allora w_1 è una base di W (genera e indipendente)

** $\mathcal{L}(w_1) \subset W$ allora $\exists w_2 \in W$ e $w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$

Considero $\mathcal{L}(w_1, w_2)$

*** $\mathcal{L}(w_1,w_2) = W$ allora (w_1, w_2) è una base di W (generatori e linearmente indipendenti perché $w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$

*** $\mathcal{L}(w_1,w_2) \subset W$ allora $\exists\ w_3 \in W$, $w_3 \notin \mathcal{L}(w_1,w_2)$; considero $\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$ ......

Sicuramente mi fermo prima di arrivare a $n+1$ vettori, poiché V può avere al più n vettori linearmente indipendenti.
Quindi mi fermo e cioè trovo una base di W con al più n vettori. Ho dimostrato la prima tesi.

Questo modo di procedere per trovare una base di un sottospazio si chiama COMPLETAMENTO A BASE.
$\{w_1, \dots, w_k\}$ indip.: ne aggiungo uno alla volta degli altri fino ad ottenere una base.

Dimostro ora la seconda parte:
suppongo che $\dim W = n = \dim V$; Th: $V = W$
So che $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $(w_1, \dots, w_n)$ base di $W \Rightarrow w_1, \dots, w_n$ sono n vettori di V (essendo W ssv di V) linearmente indipendenti (base)
$\Rightarrow$ poiché V ha dimensione n, sono una base di $V \Rightarrow$
$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) = W$. $\blacksquare$

ESEMPIO: Completare $(1,2,3) = v_1$ a base di $\mathbb{C}^3$, ovvero scrivere $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, w_2, w_3)$.

$\mathcal{L}(v_1) \overset{?}{=} \mathbb{C}^3$? NO, perché i generatori devono essere almeno 3.
Allora trovo $w_2 \in \mathbb{C}^3$, $w_2 \notin \mathcal{L}(v_1)$.

Per esempio $w_2 = (1,0,0)$ va bene? Sì perché non è multiplo di v

$\mathcal{L}(v_1, w_2) = \mathbb{C}^3$? NO, perché almeno 3 generatori

Trovo $w_3 \in \mathbb{C}^3$, $w_3 \notin \mathcal{L}(v_1, w_2)$.

$\hookrightarrow a(1,2,3) + b(1,0,0) = (a+b, 2a, 3a)$

Se metto al secondo posto 1 e al terzo 0 so che $w_3 \notin \mathcal{L}(v_1, w_2)$.

$w_3 = (1,1,0)$

$\mathcal{L}(v_1, w_2, w_3) = \mathbb{C}^3$? Controllo che siano linearmente indipendenti.
Lo sono poiché $w_3 \notin \mathcal{L}(v_1, w_2)$

$a_1 v_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = 0$ osservo che $a_3 = 0 \Rightarrow a_1, a_2 = 0$ perché v_1, w_2 L.I.

$a_3 \neq 0 \Rightarrow w_3 = -\frac{a_1}{a_3} v_1 - \frac{a_2}{a_3} w_2 \in \mathcal{L}(v_1, w_2)$

ma w_3 l'ho preso fuori dal generato

APPLICAZIONI LINEARI

$L: V \longrightarrow U$ applicazioni lineari fra due spazi vettoriali su K.

1) $\operatorname{Im} L$ è un sottospazio vettoriale di U e $\dim \operatorname{Im} L$ è detta RANGO di L.

<u>dim</u>: $\operatorname{Im} L = \{ w \in U \mid w = L(v),\ v \in V \}$

- $0 \in \operatorname{Im} L$? sì perché $0 = L(0)$
- se $u \in \operatorname{Im} L$, $k \in K$, $ku \in \operatorname{Im} L$? $ku = L(?)$

  So che $u = L(v)$, $ku = k \cdot L(v) \underset{\uparrow \text{lineare}}{=} L(kv)$

- se $u_1, u_2 \in \operatorname{Im} L$, $u_1 + u_2 \in \operatorname{Im} L$?

  $\left.\begin{array}{l} u_1 = L(v_1) \\ u_2 = L(v_2) \end{array}\right\} \Rightarrow u_1 + u_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$

2) $\operatorname{Ker} L = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \}$ è un sottospazio vettoriale di V e la sua dimensione è detta la NULLITÀ di L.

Dimostrazione simile a prima.

TEOREMA DI NULLITÀ + RANGO

Dati V, W spazi vettoriali su K e $L: V \to W$ applicazione lineare. Supponiamo $\dim V = n$. Allora $\boxed{\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = n}$

Questo mi dice anche che $\dim \operatorname{Im} L$ ha dimensione finita.

<u>dim</u>:

$\operatorname{Ker} L$ è ssv di $V \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L := m \leq n$.

Scelgo dunque una base del nucleo $B' = \{u_1, \dots, u_m\}$

Completo B' a base di V: ottengo quindi la base $B = \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$

Ora cerco di dimostrare che $\underbrace{(L(v_{m+1}) \dots L(v_n))}$ è base di $\operatorname{Im} L$.

Prendo solo quelli che aggiungo perché i primi vanno nel vettore nullo, essendo $\in \operatorname{Ker} L$.

Se ce la faccio ho finito perché $m + (n - m) = n$.

- lin. indip: $a_{m+1} L(v_{m+1}) + \dots + a_n L(v_n) = 0$ dimostro $a_i = 0 \ \forall i$

  uso la linearità $L(a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n) = 0 \Rightarrow$ appartiene al nucleo.

  Dunque $a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n = b_1 u_1 + \dots + b_n u_m$

  $b_1 u_1 + \dots + b_n u_n - a_{m+1} v_{m+1} - \dots - a_n v_n = 0$ dunque $a_i = b_i = 0 \ \forall i$

  perché $(u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = B$ per ipotesi

- generatori: sia $w = L(v) \in \operatorname{Im} L$, devo scriverlo come combinazione lineare di $L(v_{m+1}), \dots, L(v_n)$

  $w = L(v) = L(b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_n v_n) =$

  $= b_1 \underbrace{L(u_1)}_{\substack{\in \operatorname{Ker} L \\ \| \\ 0}} + \underbrace{\dots}_{\substack{\| \\ 0}} + b_m \underbrace{L(u_m)}_{\substack{\| \\ 0}} + a_{m+1} L(v_{m+1}) + \dots + a_n L(v_n) =$

  $= a_{m+1} L(v_{m+1}) + \dots + a_n L(v_n)$ ☒

In questo teorema W può avere dimensione infinita.

$$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad \dim \operatorname{Ker} L = \dim Sol(A|0) \underset{\text{T. Rouché - Capelli}}{=} n - rg A$$
$$V^n \qquad W^m$$

$$\dim \operatorname{Im} L = rg A$$

$$\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = n - rg A + rg A = n.$$

CAPITOLO 4

D'ora in poi considererò spazi di dimensione FINITA.

MATRICI DEL CAMBIAMENTO DI BASE SU $\mathbb{R}^n$ (vedi G.A. cap. 13)

Su $\mathbb{R}^2$ scelgo due basi $\mathcal{E} = ((1,0),(0,1)) = (e_1, e_2)$

$$\mathcal{B} = \left((-1,3),\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = (v_1, v_2)$$

Considero un vettore $v = (x,y)$ e voglio calcolare le sue coordinate rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ $[v]_\mathcal{B}$ e $[v]_\mathcal{E}$.

$[v]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ poiché $x(1,0) + y(0,1) = (x,y)$

$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con $a(-1,3) + b\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x,y)$

$$\begin{cases} -a + \frac{1}{2}b = x \\ 3a - \frac{1}{2}b = y \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ -\frac{x+y}{2} + \frac{1}{2}b = x \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = 3x + y \end{cases}$$

$$2a \quad '' \quad = x + y$$

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ 3x+y \end{pmatrix}$$

Si può usare per questo conto la matrice del cambiamento di base. Nel nostro caso:

$M(\mathcal{B},\mathcal{C})$ che ha questa proprietà: $M(\mathcal{B},\mathcal{C})[v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}$

Come si calcola $M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \left(\begin{array}{c|c} & \\ & \end{array} \right) = \left([e_1]_{\mathcal{B}} \;\vdots\; [e_2]_{\mathcal{B}} \right)$

coordinate del primo vettore della seconda base rispetto a $\mathcal{B}$ — coordinate del secondo vettore della seconda base rispetto a $\mathcal{B}$

$e_1 = (1,0) = a v_1 + b v_2 = a(-1,3) + b\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(-a + \frac{1}{2}b, 3a - \frac{1}{2}b\right) = (1,0)$

$$\begin{cases} -a + \frac{1}{2}b = 1 \\ 3a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

$$e_2 = (0,1) \Rightarrow \begin{cases} -a + \frac{1}{2}b = 0 \\ 3a - \frac{1}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{array} \right)$$

Serve per calcolare le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ conoscendo quelle rispetto a $\mathcal{C}$

ESEMPIO

$$[(8,18)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9 \\ 24+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 42 \end{pmatrix}$$

CASO GENERALE

Su $\mathbb{R}^n$ considero due basi $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n)$

DEF. La matrice $P = M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è così definita:

$$P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left([w_1]_{\mathcal{B}} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; [w_n]_{\mathcal{B}} \right)$$

j-esima colonna

ovvero $w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i = p_{1j} v_1 + \dots + p_{nj} v_n$

PROPRIETÀ

1) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = I_n$

dim: $M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \left([v_1]_{\mathcal{B}} \middle| \ldots \middle| [v_n]_{\mathcal{B}}\right)$ oppure $v_j = \_ v_1 + \ldots + \_ v_n =$

$v_j = 0v_1 + \ldots + 1 \cdot v_j + \ldots + 0 \cdot v_n$

2) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}') \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}}$

dim: prendo $v \in V$ e chiamo $[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ $[v]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \ldots, y_n)$, quindi:

$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ con $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

$v = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$ $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$

$$v = y_1 \cdot (p_{11} v_1 + \ldots + p_{n1} v_n) + \ldots + y_n (p_{1n} v_1 + \ldots + p_{nn} v_n) =$$

$$= \underbrace{(p_{11} y_1 + \ldots + p_{1n} y_n)}_{\substack{\text{prima riga di P} \\ \text{moltiplicata per le } y \\ = x_1 \text{ perché davanti a } v_1}} v_1 + \ldots + \underbrace{(p_{n1} y_1 + \ldots + p_{nn} y_n)}_{= x_n} v_n \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

17/11/09

Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n, su cui fisso due basi:

$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$

Fissato $v \in V$, ${}^t(x_1, \ldots, x_n) = [v]_{\mathcal{B}}$

${}^t(y_1, \ldots, y_n) = [v]_{\mathcal{B}'}$

Considero la seguente matrice $n \times n$

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left([w_1]_{\mathcal{B}} \middle| \ldots \middle| [w_n]_{\mathcal{B}}\right) = P$$

ESEMPIO

$\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3

$\mathcal{B} = (2, x+2, x^2-1)$

$\mathcal{B}' = (x+1, x-1, 3x^2)$

$v = 3 + x - x^2$

$[v]_{\mathcal{E}} = (3, 1, -1)$

$[v]_{\mathcal{B}} = {}^t(a, b, c)$ con

$3 + x - x^2 = a \cdot 2 + b(x+2) + c(x^2-1)$

1) $M_{B,B} = I_n$

2) $M_{B,B'} \cdot [v]_{B'} = [v]_B$

3) Se ho tre basi, vale $M_{B,B'} \cdot M_{B',B''} = M_{B,B''}$

dim: per ogni $v \in V$, considero $[v]_B, [v]_{B'}, [v]_{B''}$

vale $[v]_B = M_{B,B'}[v]_{B'}$, $[v]_B = \boxed{M_{B,B''}}[v]_{B''}$,

$[v]_{B'} = M_{B',B''}[v]_{B''}$, quindi

$[v]_B = M_{B,B'}[v]_{B'} = M_{B,B'}\left(M_{B',B''}[v]_{B''}\right) =$

$= \boxed{\left(M_{B,B'} \cdot M_{B',B''}\right)}[v]_{B''}$ □

4) $M_{B,B'}$ è invertibile e la sua inversa è $M_{B',B}$. Inoltre, ogni matrice invertibile è una matrice del cambiamento di base.

dim: mi basta controllare che $M_{B,B'} \cdot M_{B',B} = I_n$;

infatti $M_{B,B'} \cdot M_{B',B} \underset{(3)}{=} M_{B,B} \underset{(1)}{=} I_n$

$= 2a + bx + 2b + cx^2 - c =$

$= (2a + 2b - c) + bx + cx^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b-c=3 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases} = \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}$$

$[v]_B = (0,1,-1)$

$[v]_{B'} = {}^t(a,b,c)$

$3+x-x^2 = a(x+1) + b(x-1) + c(3x^2) =$

$= ax + a + bx - b + 3cx^2$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=1 \\ 3c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1/3 \end{cases}$$

$[v]_{B'} = (2,-1,-1/3)$

$$M_{B,B'} = \left([x+1]_B \;\middle|\; [x-1]_B \;\middle|\; [3x^2]_B \right) =$$

$[x+1]_B = (a,b,c) \Rightarrow x+1 = 2a + b(x+2) + c(x^2-1) =$

$$= 2a + bx + 2b + cx^2 - c = (2a+2b-c) + bx + cx^2 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=1 \\ 2a+2b-c=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$[x-1]_B = (a,b,c)$ stessi conti: $\begin{cases} c=0 \\ b=1 \\ 2a+2b-c=-1 \Rightarrow a=-3/2 \end{cases}$

$[3x^2]_B = (a,b,c)$ stessi conti: $\begin{cases} c=3 \\ b=0 \\ 2a+2b-c=0 \Rightarrow a=3/2 \end{cases}$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ 2-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ VERO

ESERCIZIO:

Continuare l'esercizio precedente calcolando:

$M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \quad M(\mathcal{C},\mathcal{B}) \quad M(\mathcal{C},\mathcal{B}') \quad M(\mathcal{B}',\mathcal{C})$

MATRICI E APPLICAZIONI LINEARI

Ricordo che se $L: K^n \to K^m$ è un'applicazione lineare, è associata

$A \in M(m \times n, K)$ tale che $L(x) = A \cdot x$

che è definita così: $\boxed{A} = \left(L(e_1) \,\vdots\, L(e_2) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, L(e_n) \right)$

Problema: siano V^n, U^m s.v. di dimensione finita su K, $T: V \to U$ applicazione lineare.

Scelgo $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V e $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_m)$ base di U

ho quindi i due isomorfismi: $\varphi_{\mathcal{B}}: V \to K^n$, $\varphi_{\mathcal{B}'}: U \to K^m$

$v \to [v]_{\mathcal{B}} \qquad u \to [u]_{\mathcal{B}'}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & U \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[r, bend left=80] & K^m \end{tikzcd}$$

$L := \varphi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ applicazione lineare da K^n in K^m

allora, L ha una matrice $\boxed{A}$

Chiamo "matrice di T rispetto alle due basi" proprio la matrice A.

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B}, T) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(T) := A$$

Osservazione: componendo con $\varphi_{\mathcal{B}}$, si ottiene $L \circ \varphi_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{B}'} \circ T$ che applico a $v \in V$

$$L(\varphi_{\mathcal{B}}(v)) = \varphi_{\mathcal{B}'}(T(v)) \qquad T: V_{\mathcal{B}} \to U_{\mathcal{B}'}$$

$$v \qquad T(v)$$

$$L([v]_{\mathcal{B}}) = [T(v)]_{\mathcal{B}'} \Rightarrow A[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

Come si costruisce la matrice A:

$$A = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(T) = \left([T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [T(v_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Infatti se applico $A[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$ al vettore v_1 ottengo:

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{[v_1]_{\mathcal{B}}} = [T(v_1)]_{\mathcal{B}'}$$ che è esattamente la prima colonna di A.

ESEMPIO

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \mathcal{B} = (2, x+2, x^2-1)$ come applicazione lineare prendo la derivata.

$T = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x] = U \qquad \mathcal{B}' = (1, x) = \mathcal{E}$ = base canonica

Calcolare $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\left(\frac{d}{dx}\right) \in M_{2\times 3}$.

base arrivo

colonna

Ricordo che $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) = \left([T(v_i)]_{\mathcal{E}} \right)$

$$T(v_1) = \frac{d}{dx}(2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x$$

$T(v_2) = \dfrac{d}{dx}(x+2) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x$

$T(v_3) = \dfrac{d}{dx}(x^2-1) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolare, con la matrice, $T(10-8x+3x^2)$ [deve venire $-8+6x$]

• trovo le coordinate di $10-8x+3x^2$ in base $\mathcal{B}$

$[10-8x+3x^2]_{\mathcal{B}} = a(2) + b(x+2) + c(x^2-1) = 2a + bx + 2b + cx^2 - c$

$$\begin{cases} 2a+2b-c = 10 \\ b = -8 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 29/2 \\ b = -8 \\ c = 3 \end{cases} \qquad [10-8x+3x^2]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{29}{2}, -8, 3\right)$$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{E}} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29/2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$ ovvero $T(v) = -8+6x$

VERO

Cosa succede componendo due applicazioni lineari

$$\begin{tikzcd} V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "L \circ T"'] & W_{\mathcal{B}'} \arrow[r, "L"] & U_{\mathcal{B}''} \end{tikzcd}$$ s.v. di dimensioni finite, T, L lineari

Ho tre matrici: $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(T)$, $M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(L)$, $M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(L \circ T)$

Il legame è $M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(L \circ T) = M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(L) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(T)$

La composizione di applicazioni lineari si traduce in una moltiplicazione tra matrici.

<u>dim</u>: per ogni $v \in V$ vale $\boxed{M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(L \circ T)} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [(L \circ T)(v)]_{\mathcal{B}''}$

$M_{\mathcal{B}';\mathcal{B}}(T)\,[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$ e $M_{\mathcal{B}'';\mathcal{B}'}(L)\,[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [L(T(v))]_{\mathcal{B}''}$

$$\boxed{M_{B'',B'}(L)\cdot M_{B',B}(T)\,[v]_B} = [(L\circ T)(v)]_{B''}$$

Le due matrici devono essere uguali ☒

Inoltre, se $T: V_B \to W_{B'}$ è invertibile, $M_{B,B'}(T^{-1}) = (M_{B',B}(T))^{-1}$

<u>dim</u>: mi basta controllare che $M_{B',B}(T)\cdot M_{B,B'}(T^{-1}) = I_n$

$$M_{B',B'}(T\circ T^{-1}) = M_{B',B'}(Id) := \underset{I_n}{\underset{\parallel}{M_{B',B'}}}$$ perché l'identità non cambia il vettore ma solo la base.

☒

DIAGONALIZZARE UN OPERATORE

OPERATORE → applicazione lineare con dominio uguale al codominio e con stessa base sia su D che su C.

$$T: V^n_B \longrightarrow V^n_B \quad \text{(lineare)}$$

<u>Se</u> T è rappresentato da una matrice diagonale D, i conti sono facili:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ • $\det = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1^{50} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{50} \end{pmatrix}$

DIAGONALIZZARE → trovare una base in cui la matrice è diagonale.

Non sempre funziona.
Devo quindi saper confrontare $M_{B,B}(T) = M_B(T)$ con $M_{B'}(T)$
Il legame è questo:

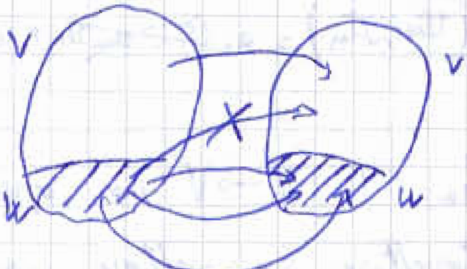
$$\boxed{M_{B'}(T) = P^{-1}\cdot M_B(T)\cdot P} \quad \text{dove} \quad P = M_{B,B'}$$

Due matrici così si dicono SIMILI $\quad A = P^{-1}\cdot C\cdot P$

Cerco $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V tale che $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Se vale questo, $T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n = \lambda_1 v_1$ prima colonna ovvero che v_1 viene mandato dall'operatore T in un suo multiplo.
Ogni vettore della base viene mandato da T in un suo multiplo.
Si risolve il problema della diagonalizzazione se trovo n vettori di questo tipo che formino una base di T.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K, $T: V \longrightarrow V$ un operatore.
Un sottospazio W di V è detto T-INVARIANTE se $T(W) \subseteq W$, ovvero se $\forall w \in W$, $T(w) \in W$.
Se W è T-invariante, posso definire l'operatore $T|_W : W \longrightarrow W$.



AUTOVETTORE per T è una base per un sottospazio T-invariante di dimensione 1.

Cosa significa? Sia w autovettore ($w \neq 0$ in quanto base).
$T(w) \in W = \mathcal{L}(w)$ cioè $T(w) = kw$, esattamente i vettori che stavamo cercando, vettori che sono mandati in un loro multiplo.

PROPOSIZIONE: V è spazio vettoriale di dim. n, e W_1, W_2 sono sottospazi T-invarianti ($T: V \to V$ operatore) e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di W_1, W_2

1) Se $\mathcal{B}$ è una base di V ottenuta completando $\mathcal{B}_1$, allora
$M_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \underbrace{0}_{k} & D \end{array}\right)$, dove $A = M_{\mathcal{B}_1}(T|_{W_1})$ $M_{\mathcal{B}}$ matrice a blocchi.

2) Se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, allora $M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ con $A = M_{\mathcal{B}_1}(T|_{W_1})$, $D = M_{\mathcal{B}_2}(T|_{W_2})$.

dim. 1) Le colonne di $M_{\mathcal{B}}(T)$ sono $[T(v_i)]_{\mathcal{B}}$; la prima è così fatta:

v_1 è il primo vettore di $\mathcal{B}_1$ che è base di $W_1 \Rightarrow T(v_1) \in W_1$

perché W_1 è T-invariante. $\Rightarrow T(v_1) = \underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k}_{W_1} + \cancel{v_{k+1} + \ldots + v_n}$

voglio $T(v_1) \in W_1$

Lo stesso discorso si può fare per $v_2, \ldots, v_k$ dove $k = \dim W_1$.

Per le altre colonne non so niente, quindi sono generiche ☒

2) Sia $\mathcal{B} = (\underbrace{v_1, \ldots, v_k}_{\mathcal{B}_1}, \underbrace{v_{k+1}, \ldots, v_n}_{\mathcal{B}_2})$, vale lo stesso discorso di prima

$T(v_1, \ldots, v_k) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k + \cancel{\ldots}$

$T(v_{k+1}, \ldots, v_n) = \cancel{a_1 v_1 \ldots a_k v_k} + a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \end{array}$$

☒

Def. Sia $T: V \to V$ un operatore. Dalla definizione precedente, un autovettore (o vettore caratteristico) è un $v \in V$, $v \neq 0$, tale che $T(v) = \lambda v$ per un certo $\lambda \in K$.

Un AUTOVALORE di T è un $\lambda \in K$ tale che $\exists v \neq 0$ con $T(v) = \lambda v$.

Oss: quindi se v autovettore sta in una base $\mathcal{B} = (v, u_2, \ldots, u_n)$ allora la corrispondente colonna della matrice è $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda e_1$

In generale: $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

v_j è autovettore di $T \Leftrightarrow$ la j-esima colonna è λe_j

Quindi $M_{\mathcal{B}}(T)$ è diagonale $\Leftrightarrow$ ogni elemento della base $\mathcal{B}$ è un autovettore di

ESEMPIO: Calcolo la base richiesta:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{bmatrix}$

Devo diagonalizzare T.

Devo trovare una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di T.

1) Calcolare gli autovalori tale che $\begin{cases} x+3y=\lambda x \\ 2x+4y=\lambda y \end{cases}$ sia risolubile. Per farlo risolvo l'equazione caratteristica:

$$\det(A-tI_2)=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ 2 & 4-t \end{pmatrix} \quad \det(A-tI_2)=(1-t)(4-t)-6=0$$

$$4+t^2-5t-6=0 \quad t^2-5t-2=0 \quad t=\frac{5\pm\sqrt{25+8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2} \begin{cases} \lambda_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

2) Calcolare gli autovettori

$\hookrightarrow$ di λ_1: $T(x,y)=\lambda_1(x,y)$ $\begin{cases} x+3y=\frac{5+\sqrt{33}}{2}x \\ 2x+4y=\frac{5+\sqrt{33}}{2}y \end{cases}$

sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x+6y=(5+\sqrt{33})x \\ 4x+8y=(5+\sqrt{33})y \end{cases} \quad \begin{cases} (-3-\sqrt{33})x+6y=0 \\ 4x+(3-\sqrt{33})y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{3+\sqrt{33}}{6}x \\ 4x+(3-\sqrt{33})\frac{3+\sqrt{33}}{6}x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+\frac{9-33}{6}x=0 \\ y=\frac{3+\sqrt{33}}{6}x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-4x=0 \text{ sempre vera} \\ y=\frac{3+\sqrt{33}}{6}x \end{cases}$$

il sistema ha ∞ soluzioni e meno male, altrimenti se fosse venuta una sola soluzione, quindi quella nulla, non avrei trovato autovettori

L'insieme degli autovettori con autovalore λ si indica con V_1 ed è $V_1=\left\{(x,y) \mid y=\frac{3+\sqrt{33}}{6}x\right\}$ detto AUTOSPAZIO DI λ_1.

Ne scelgo uno $v_1=(6,\ 3+\sqrt{33})$

↳ di λ_2:

$$\begin{cases} x+3y = \frac{5-\sqrt{33}}{2}x \\ 2x+4y = \frac{5-\sqrt{33}}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+6y = (5-\sqrt{33})x \\ 4x+8y = (5-\sqrt{33})y \end{cases} \quad \begin{cases} (-3+\sqrt{33})x+6y=0 \\ 4x+(3+\sqrt{33})y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3-\sqrt{33}}{6}x \\ 4x+(3+\sqrt{33})\frac{(3-\sqrt{33})}{6}x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3-\sqrt{33}}{6}x \\ 24x+9x-33x=0 \end{cases} \quad 0=0 \ \checkmark \quad \text{è solo un controllo}$$

$V_2 = \left\{(x,y) \mid y = \frac{3-\sqrt{33}}{6}x\right\}$ ne scelgo uno $v_2 = (6, 3-\sqrt{33})$

v_2 non posso sceglierlo da V_1 perchè v_1, v_2 devono essere indipendenti

La base cercata è $(v_1, v_2) = [(6, 3+\sqrt{33}), (6, 3-\sqrt{33})]$

Verifica: $T(x,y) = (x+3y, 2x+4y)$

$T(v_1) = T(6, 3+\sqrt{33}) = (6+9+3\sqrt{33}, 12+12+4\sqrt{33}) = (15+3\sqrt{33}, 24+4\sqrt{33})$

Ora devo esprimerlo rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$(15+3\sqrt{33}, 24+4\sqrt{33}) = a_1(6, 3+\sqrt{33}) + a_2(6, 3-\sqrt{33})$$
$$= (6a_1+6a_2, (3+\sqrt{33})a_1 + (3-\sqrt{33})a_2)$$

$$\begin{cases} 6a_1+6a_2 = 15+3\sqrt{33} \\ (3+\sqrt{33})a_1 + (3-\sqrt{33})a_2 = 24+4\sqrt{33} \end{cases} \quad \begin{cases} 6a_1+6a_2 = 15+3\sqrt{33} \\ 3a_1+\sqrt{33}a_1+3a_2-\sqrt{33}a_2 = 24+4\sqrt{33} \end{cases}$$

...

Quindi, $T: V^n \to V^n$ ho dato la definizione di autovettore e autovalore di T.

Def: Se $\lambda \in K$ è un autovalore di T, il suo autospazio è

$V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda\,Id) \doteq$ l'insieme di tutti gli autovettori che hanno λ come autovalore (e il vettore nullo, affinché sia uno s.v.).

Le due definizioni si equivalgono, infatti:

sia $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \iff (T - \lambda Id)(v) = 0$

$$T(v) - \lambda\, Id(v) = 0$$
$$T(v) - \lambda v = 0$$
$$T(v) = \lambda v$$ ovvero v è avt di avl λ.

Def: Il POLINOMIO CARATTERISTICO di una matrice A è $\det(A - t\,Id) = p(t)$

Il polinomio caratteristico di un operatore T è il polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice che lo rappresenta.

Prop: Come si calcolano gli autovalori?

Un numero $\lambda \in K$ è autovalore di $T \iff$ è radice del suo polinomio caratteristico.

dim: Sia A una matrice di T, $p(t) = \det(A - t\,Id)$.

Sia $\lambda \in K$ un autovalore di $T \iff \exists\, v \neq 0$ con $T(v) = \lambda v$.

Dunque, $\exists\, v \neq 0$ tale che $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$, quindi $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \neq 0$

$\iff$ Questo operatore non è invertibile (non iniettiva), quindi la matrice $A - \lambda I_d$ è singolare, cioè $\det(A - \lambda I_d) = 0$, cioè $p(\lambda) = 0$.

λ è radice del polinomio.

$\boxtimes$

Ora controllo il passaggio inverso. OK

Osservazione: ci sono degli operatori non diagonalizzabili.

ESEMPIO SU $\mathbb{R}^2$

La rotazione è un operatore che non manda nessun vettore in un suo multiplo. R_θ non manda vettori in loro multipli; dunque non ha autovettori, non è diagonalizzabile.

$$p(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta - t & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - t \end{pmatrix} = (\cos\theta - t)^2 + \sin^2\theta = t^2 - 2t\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}}{1} \quad \leq 0 \quad (=0 \text{ se } \theta = k\pi, \text{ da escludere})$$

$\hookrightarrow$ non ha soluzioni reali.

24/11/09

$T: V^n \to V^n$ operatore

$\mathcal{B} \to \mathcal{B}$

$\mathcal{B}' \to \mathcal{B}'$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = M(\mathcal{B},\mathcal{B},T) = M_{\mathcal{B}}(T) = M(\mathcal{B},T)$$

DEF. Due matrici $n \times n$ A e C si dicono SIMILI se $\exists$ una matrice invertibile P tale che $\boxed{C = P^{-1}AP}$ ovvero $PC = AP$

PROP. Due matrici che rappresentano l'operatore T rispetto a basi diverse sono simili (e anche due matrici simili rappresentano un certo operatore rispetto a basi diverse).

Dim: $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi $\quad M_{\mathcal{B}}(T)$, $M_{\mathcal{B}'}(T)$ $\qquad$ Th: sono simili

Ricordo che $M_{\mathcal{B}}(T)[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}'}(T)[v]_{\mathcal{B}'} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$

Ricordo che $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')[v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}}$ e $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$

P

Vediamo che P soddisfa la tesi. Sostituisco queste sopra.

$$M_{\mathcal{B}}(T) \cdot P \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = P \cdot [T(v)]_{\mathcal{B}'} = P \cdot M_{\mathcal{B}'}(T)[v]_{\mathcal{B}'}$$

Da cui: $M_B(T)\cdot P = P\cdot M_{B'}(T)$ ovvero $P\cdot C = A\cdot P$ $\square$

$M_B(T)$ è simile a $M_{B'}(T)$

<u>PROP.</u> Matrici simili (ovvero che rappresentano lo stesso operatore) hanno lo stesso polinomio caratteristico.

<u>Dim.</u> $C = P^{-1}AP$ è l'ipotesi, $p_C(t) = \det(C - tI) \overset{?}{=} \det(P^{-1}AP - tI)$.

$$\det(P^{-1}AP - t\underbrace{P^{-1}P}_{I_d}) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\underset{\substack{\downarrow \\ \text{non cambia nulla}}}{tI}P) = \det(P^{-1}\cdot(A-tI)\cdot P) =$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ \det(A\cdot B\cdot C) = \\ = \det A\cdot\det B\cdot\det C}}{\text{formula di Binet}} = \det P^{-1}\cdot\det(A-tI)\cdot\det P = \det(A-tI) \quad \square$$

$\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}$

TEOREMA 4.12: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $T: V \to V$ un operatore. Sono equivalenti:

1) $\exists\, \mathcal{B}$ base di V formata da autovettori di T
2) $\exists\, \mathcal{B}$ base di V tale che $M_B(T)$ è diagonale.
3) Ogni matrice che rappresenta T è simile ad una matrice diagonale

Se vale una di queste tre, T si dice diagonalizzabile.

A matrice si dice diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale

Esistono operatori non diagonalizzabili, ad es. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \neq 0, \pi$$

ESERCIZIO 4.10: Diagonalizzare questo operatore su $\mathbb{C}^2$ (matrice sempre reale)

1) Calcolo gli autovalori: $p(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - tI & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - tI \end{pmatrix} =$

$= (\cos\theta - t)^2 + \sin^2\theta = t^2 - 2t\cos\theta + 1 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}}{1} = \begin{cases} \cos\theta + j\underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta}}_{\sin\theta} = \lambda_1 \\ \cos\theta - j\underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta}}_{\sin\theta} = \lambda_2 \end{cases}$$

sempre due radici distinte perché ho escluso $0, \pi$.

2) Calcolo gli autovettori (ovvero gli autospazi).

$T(v) = \lambda_1(v) \qquad v = (z_1, z_2)$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, z_1 - \sin\theta\, z_2 \\ \sin\theta\, z_1 + \cos\theta\, z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})\, z_1 \\ (\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 1})\, z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\theta\, z_1 - \sin\theta\, z_2 - (\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1})\, z_1 = 0 \\ \sin\theta\, z_1 + \cos\theta\, z_2 - (\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 1})\, z_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\sqrt{\cos^2\theta - 1}\, z_1 - \sin\theta\, z_2 = 0 \\ \sin\theta\, z_1 - \sqrt{\cos^2\theta - 1}\, z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = -\dfrac{\sqrt{\cos^2\theta - 1}\, z_1}{\sin\theta} \\ \sin\theta\, z_1 + \sqrt{\cos^2\theta - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{\cos^2\theta - 1}\, z_1}{\sin\theta} = \sin\theta\, z_1 + \dfrac{\cos^2\theta\, z_1 - z_1}{\sin\theta} = \dfrac{z_1 - z_1}{\sin\theta} = 0 \end{cases}$$

OK

$$V_1 = \left\{ \left(z_1, \frac{-\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{\sin\theta} z_1 \right) \right\} = (z_1, -i z_1)$$

come primo vettore posso prendere $v_1 = (1, -i)$

Calcolo l'altro autovettore: $T(v) = \lambda_2 v$

$$\begin{cases} \cos\theta\, z_1 - \sin\theta\, z_2 - (\cos\theta - \sqrt{1-\cos^2\theta})\, z_1 = 0 \\ \sin\theta\, z_1 + \cos\theta\, z_2 - (\cos\theta + \sqrt{1-\cos^2\theta})\, z_2 = 0 \end{cases} \quad \ldots \quad z_2 = \frac{\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{\sin\theta} z_1 = i z_1$$

$$V_2 = \{ (z_1, i z_1) \} \qquad v_2 = (1, i)$$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ è la base di $\mathbb{C}^2$ che diagonalizza l'operatore.

La matrice $P = M(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

$$P^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}\cos\theta+i\sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta-i\sin\theta\end{pmatrix}$$

RECUPERO
- MERCOLEDÌ 9/12 14.30
- MERCOLEDÌ 16/12 14.30

$$P^{-1}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}i & -1\\ i & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2i\\ 1/2 & 1/2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$$

PROP: $T: V^n \to V^n$ su K. Allora:

- T non ha più di n autovalori (perché $p(t)$ ha grado n)
- se $K=\mathbb{C}$, T ha almeno un autovalore (T ha n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica); questo perché $p(t)$ in campo complesso ha sempre radici (teorema fondamentale dell'algebra).

ESEMPIO: $(t-1)^3=0$ grado 3, soluzioni/radici $t=1$ con molteplicità 3.

TEOREMA: Siano $v_1,\dots,v_r$ autovettori dell'operatore $T: V^n \to V^n$ e siano $c_1,\dots,c_r$ i loro autovalori tutti distinti.
Allora, i vettori $v_1,\dots,v_r$ sono linearmente indipendenti. Quindi, se il polinomio caratteristico ha n radici distinte in K, allora T è diagonalizzabile.

Dim. Per induzione su r

$\boxed{r=1}$ ho 1 vettore v_1 con autovalore c_1 è lin. indip? Sì perché non è null

Suppongo vera la tesi per $r-1$ autovettori, e la dimostro per r.
Sia $a_1v_1+\dots+a_rv_r=0$, voglio dimostrare che $a_j=0\ \forall j$
Applico l'operatore T:

$T(a_1v_1+\dots+a_rv_r)=T(0)$ $\quad a_1T(v_1)+\dots+a_rT(v_r)=0$ per ipotesi, v_j autovett. $\Downarrow$ $T(v_j)=c_jv_j$

$a_1c_1v_1+\dots+a_rc_rv_r=0$ moltiplico questo per c_1 se $\neq 0$

$c_1 a_1 v_1 + \ldots + c_1 a_r v_r = 0$ sottraggo le due:

// $(a_2 c_2 - c_1 a_2) v_2 + \ldots + (a_r c_r - c_1 a_r) v_r = 0$ ho eliminato un vettore, per cui ho $r-1$ termini che, per ipotesi induttiva, sono linearmente indipendenti $\Rightarrow (a_2 c_2 - c_1 a_2) = 0, \ldots, (a_r c_r - c_1 a_r) = 0$

$$a_2(c_2 - c_1) = 0, \ldots, a_r(c_r - c_1) = 0$$

$c_j - c_1 = 0$ non può essere perché per ipotesi c_j tutti diversi

$\Rightarrow a_j = 0$ per $j \geq 2$

Mi manca a_1: torno a $a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = 0$, ora tutte le a_j sono nulle e rimane $a_1 v_1 = 0$ ma $v_1 \neq 0$ perché autovettore

$\Rightarrow a_1 = 0$ ☐

TEOREMA: $T: V^n \to V^n$ operatore è diagonalizzabile se e solo se:

1) tutte le radici del polinomio caratteristico stanno in K;
2) per ogni autovalore λ, la sua molteplicità algebrica deve essere uguale a quella geometrica di λ, cioè alla dimensione dell'autospazio $\dim V_\lambda$.

In generale vale $m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)$

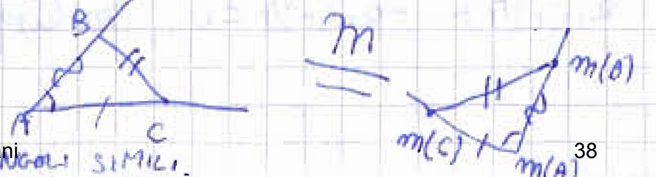
OSS. se T non è diagonalizzabile:
- scegliere B tale che $M_B(T)$ sia triangolare (si può sempre fare)
- si sceglie la forma di Jordan.

STUDIO DELLE ROTAZIONI DELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$ E DEI MOVIMENTI RIGIDI

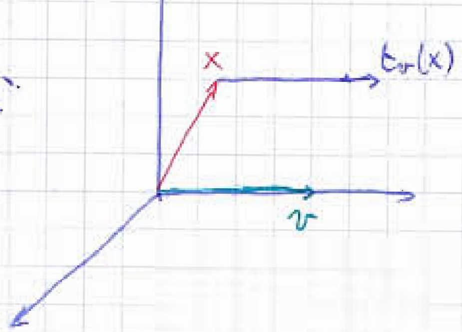
DEF. Un MOVIMENTO RIGIDO o ISOMETRIA di $\mathbb{R}^3$ è $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che conserva le distanze, cioè:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ vale $\text{dist}(m(x), m(y)) = \text{dist}(x, y)$

OSS. Conserva anche gli angoli



DEF. Una traslazione di vettore $v \in \mathbb{R}^3$ è $t_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita
$t_v(x) = x + v$



OSS. Le traslazioni sono movimenti rigidi

Dim. $dist(m(x), m(y)) = dist(x, y)$

$dist(t_v(x), t_v(y)) = \|t_v(x) - t_v(y)\|$
$= dist(x+v, y+v) = \|x+\cancel{v}-y-\cancel{v}\| = \|x-y\| = dist(x,y)$ ☒

OSS. Le traslazioni non sono operatori di $\mathbb{R}^3$, infatti $t_v(0) = 0 + v = v \neq 0$

$$L: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$$

$$L(a+bx+cx^2) = a+b+c+(2a-3b)x$$

· Verifico che sia una applicazione lineare

$p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ $\quad q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$* \; L(kp(x)) \overset{?}{=} kL(p(x))$

$* \; L(p(x)+q(x)) \overset{?}{=} L(p(x)) + L(q(x))$

$p(x) = a+bx+cx^2 \qquad kp(x) = ka+kbx+kcx^2$

$L(kp(x)) = ka+kb+kc+(2ka-3kb)x = k\left[a+b+c+(2a-3b)x\right] = k\cdot L(p(x))$ ok

$q(x) = a'+b'x+c'x^2 \qquad p(x)+q(x) = a+bx+cx^2+a'+b'x+c'x^2 = (a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2$

$L(p(x)+q(x)) = (a+a')+(b+b')+(c+c')+(2(a+a')-3(b+b'))x =$

$\underset{\text{associativa}}{\overset{\text{commutativa}}{=}} a+b+c+(2a-3b)x+a'+b'+c'+(2a'-3b')x = L(p(x))+L(q(x))$ ok

Trovare la matrice associata alla base canonica: $M(C,C')$.

$C=(1,x,x^2) \qquad L(1) = L(1+0\cdot x+0\cdot x^2) = 1+0+0+(2\cdot 1-3\cdot 0)x = 1+2x$

$C'=(1,x) \qquad [L(1)]_{C'} \Rightarrow a\cdot 1+b\cdot x = 1+2x \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$L(x) = 1-3x \qquad [L(x)]_{C'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$L(x^2) = 1 \qquad [L(x^2)]_{C'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$M(C,C') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ho due famiglie di polinomi: $B=(1+x, 1+x^2, 1+x+x^2) \in \mathbb{R}_2[x]$ e

$B'=(1+x, 1-x) \in \mathbb{R}_1[x]$ sono basi? Scrivere $M(B,B';L)$

$a(1+x)+b(1+x^2)+c(1+x+x^2)=0 \quad a+ax+b+bx^2+c+cx+cx^2=0 \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Sono indipendenti (e generatori perché dim = 3)

$a(1+x)+b(1-x)=0 \quad a+ax+b-bx=0 \quad \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ OK

$L(1+x)=L(1+1\cdot x+0\cdot x^2)=2+x(-1)=2-x \quad [L(1+x)]_{B'}=?$

$a(1+x)+b(1-x)=(2-x) \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \end{matrix} \quad [L(1+x)]_{B'}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

30/11/09

ROTAZIONI (INTORNO ALL'ORIGINE) NELLO SPAZIO

La rotazione viene descritta da:

- un asse di rotazione, che individuiamo con un vettore v (di lunghezza 1)
- un angolo $\theta \neq 0$

Osservo che (v,θ) e $(-v,-\theta)$ rappresentano la stessa rotazione.

OSS: l'identità è una rotazione per convenzione.

ESEMPIO:

$$C=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ rotazione intorno all'origine di asse z e di angolo θ.

Siccome l'ho descritta come applicazione lineare, l'origine deve essere mandata nell'origine.

Un punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ sull'asse z viene lasciato invariato $C\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

Se prendo un generico punto del piano (x,y) ottengo:

$$C\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

RIPASSO MATRICI ORTOGONALI 3X3. $\mathcal{O}(3)$

1) $A \in O(3) \overset{def}{\Longleftrightarrow} A^T \cdot A = I$ (ovvero $A \cdot A^T = I$, ovvero $A^{-1} = A^T$)

2) Se $A \in O(3)$, allora $\det A = \pm 1$. Chiamo $SO(3)$ quelle con determinante 1 (SPECIALI ORTOGONALI)

3) A è ortogonale $\Longleftrightarrow$ le sue colonne sono a due a due ortogonali e di norma 1. $A^i A^j = \delta_{ij}$ $\quad \delta = 1$ se $i = j$

$\delta = 0$ se $i \neq j$

Anzi, sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

4) Se $A \in O(3)$, allora essa conserva il prodotto scalare, cioè $AX \cdot AY = X \cdot$
(dimostrato nel problema 4 del capitolo 6 G.A.)

5) $O(3)$ è un GRUPPO di matrici, cioè

- $I \in O(3)$
- se $A \in O(3)$, anche $A^{-1} \in O(3)$
- se $A, B \in O(3)$, anche $A \cdot B \in O(3)$

.. Infatti: devo dimostrare $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = I \overset{\text{prop. matrici}}{\Longleftrightarrow} (A^T)^{-1} \cdot (A^{-1}) = Id$

$\Leftrightarrow (A \cdot A^T)^{-1} = Id \Leftrightarrow I^{-1} = I$ VERO

perché $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e $(AB)^T = B^T A^T$

... So che $A^T \cdot A = I$ e $B^T B = I$, $(AB)^T (AB) = ?$

$\underbrace{(B^T A^T)(AB)}_{Id} = B^T I B = B^T B = I. \Rightarrow$ VERO

Dimostrare che anche $SO(3)$ è un gruppo di matrici. (ESERCIZIO)

DEF. Un MOVIMENTO RIGIDO (o ISOMETRIA) di $\mathbb{R}^3$ è una applicazione $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che conserva le distanze: $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ vale che $dist(m(x), m(y)) = dist(x, y)$.

Non sono sempre applicazioni lineari (la traslazione non lo è pur essendo un movimento rigido).
Si conservano anche lunghezze e angoli, quindi la forma.

TEOREMA

Sia $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione (funzione). Sono equivalenti:

1) m è uno movimento rigido con $m(0) = 0$.
2) m conserva il prodotto scalare, cioè $m(x) \cdot m(y) = x \cdot y \quad \forall x, y$
3) $m(x) = AX$ con $A \in O(3)$

Dimostrazione: per risparmiare tempo uso la dimostrazione circolare:

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, Rightarrow] & 1 \arrow[dl, Rightarrow] \\ 2 \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

3) $\Rightarrow$ 1): se $m(x) = AX$, m è una applicazione lineare perchè solo le applicazioni lineari hanno una matrice associata. Ma se è applicazione lineare, manda l'origine nell'origine, dunque $m(0)=0$.
Devo dimostrare che $dist(m(x), m(y)) = dist(x, y)$. Questo è vero per le proprietà delle matrici ortogonali; infatti:

$$(dist(m(x), m(y)))^2 = \| m(x) - m(y) \|^2 = (m(x) - m(Y)) \cdot (m(x) - m(Y)) =$$
$$= (Ax - Ay)(Ax - Ay) = AxAx - AxAy - AyAx + AyAy = X \cdot X - X \cdot Y - Y \cdot X + Y \cdot Y.$$
$$(dist(X, Y))^2 = (X - Y)(X - Y) = X \cdot X - XY - YX + Y \cdot Y \quad //$$ VERO

1) $\Rightarrow$ 2): ricordo dalla 3) $\Rightarrow$ 1) che $dist(m(x), m(Y)) = (m(x) - m(Y)) \cdot (m(x) - m(Y)) =$
$$= m(x)\, m(x) - \underset{\substack{\text{prodotto}\\\text{scalare}\\\text{commutativo}}}{2} (m(x) - m(Y)) + m(Y)\, m(Y) = \text{per ipotesi } [dist(m(x), m(y)) = dist(x, y)] =$$

$$= \cancel{X \cdot X} - 2 (m(x) \cdot m(Y)) + \cancel{Y \cdot Y}.$$

Ma $dist(m(x), m(Y)) \overset{(Hp)}{=} dist(X, Y) = (X - Y)(X - Y) = \cancel{X \cdot X} - 2 (X \cdot Y) + \cancel{Y \cdot Y}$

Semplificando ottengo $m(x) \cdot m(Y) = X \cdot Y$.

2) ⇒ 3)

Osservazione: l'unica applicazione m che conserva il prodotto scalare e $m(e_j) = e_j$, $j=1,2,3..$ è l'identità!

9 DICEMBRE: 16.30-18.30 AULA D
16 DICEMBRE: 16.30-18.30 AULA D

dim: sia $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $m(x) = (y_1, y_2, y_3)$: allora $x_j = X \cdot e_j = m(x) \cdot m(e_j) =$

$= (y_1, y_2, y_3) e_j = y_j$

cioè m è l'identità.

Hp: m conserva il prodotto scalare

Th: $m(x) = AX$, $A \in O(3)$

dim:

- Considero $A = \left(m(e_1) \,\vdots\, m(e_2) \,\vdots\, m(e_3) \right) \triangleq M_{C,B}(Id)$ se B è $(m(e_1), m(e_2), m(e_3))$

$A \in O(3)$ infatti: B è una <u>base ortonormale</u> di $\mathbb{R}^3$ perché m conserva le lunghezze e il prodotto scalare.

Perciò le colonne di A sono a due a due ortogonali e di norma 1.

Da quanto detto sulle matrici ortogonali, anche A^{-1} è ortogonale, perciò A^{-1} conserva il prodotto scalare.

- Considero $A^{-1} \circ m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è una applicazione che conserva il prodotto scalare perché sia A^{-1} che m lo conservano, ma conserva anche la base canonica, infatti:

$(A^{-1} \circ m)(e_j) = A^{-1}(m(e_j)) = (A^{-1}A)(e_j) = e_j$

Perciò, dall'osservazione, $A^{-1} \circ m = I_d$ cioè $m(x) = AX$ ⊠

CONSEGUENZA: Ogni movimento rigido m si può scrivere come composizione di un operatore ortogonale e una traslazione, cioè

- $m(X) = AX + \underbrace{v}_{\text{traslazione}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $A \in O(3)$

Dim: parto da m e chiamo $v = m(0)$; allora

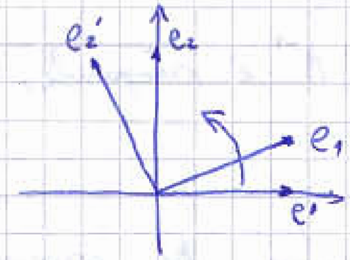
- $t_{-v} \circ m$ è un movimento rigido per composizione
- lascia fisso l'origine, infatti $(t_{-v} \circ m)(0) = t_{-v}(m(0)) = t_{-v}(v) = v - v = 0$.

Dal teorema $(t_{-v} \circ m)(X) = AX$ con $A \in O(3)$, dunque si ha:
$m(x) - v = AX$ cioè $m(x) = Ax + v$.

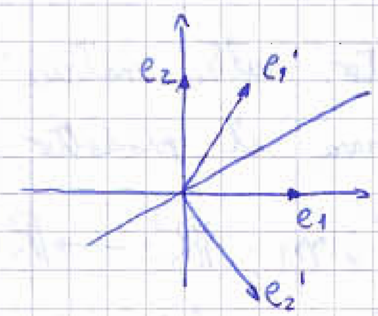
DEF. Sia m un movimento rigido: $m(x) = AX + v$. Diremo che m CONSERVA l'orientazione se $A \in SO(3)$, cioè ha $\det A = +1$, e diremo che m ROVESCIA l'orientazione se $\det A = -1$.

Sul piano $O(2)$ — det 1 rotazioni
— det −1 riflessioni

$\Rightarrow$ Le rotazioni conservano l'orientazione, le riflessioni rovesciano l'orientazione.



(e_1, e_2) stesso ordine di (e_1', e_2')
ROTAZIONE



(e_1, e_2) non ha lo stesso ordine di (e_1', e_2')
RIFLESSIONE.

DEF. Una ROTAZIONE r di $\mathbb{R}^3$ intorno all'origine è un movimento rigido che soddisfa:

1) $r(0) = 0$
2) $\exists$ un vettore $v \neq 0$ con $r(v) = v$
3) r agisce come una rotazione piana sul piano passante per l'origine di vettore normale v.

TEOREMA: Le rotazioni intorno all'origine sono gli operatori rappresentati in base canonica da una matrice $A \in SO(3)$

Questo teorema ci dà una caratterizzazione algebrica di un oggetto geometrico.

CONSEGUENZE:

1) La composizione di due rotazioni di $\mathbb{R}^3$ intorno all'origine è ancora una rotazione di $\mathbb{R}^3$ intorno all'origine.
2) Le rotazioni sono quei movimenti rigidi che conservano l'origine e conservano l'orientazione.

1/12/09

PRODOTTI SCALARI ($\approx$ CAP. 6)

In $\mathbb{R}^n$, abbiamo definito il prodotto scalare (STANDARD) così:

$\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (x_1, \dots, x_n)^T$, $w = (y_1, \dots, y_n)^T$, allora $v \cdot w = \langle v, w \rangle \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

PROPRIETÀ

- Bilinearità $\rightarrow$ è lineare su ciascuna delle due componenti se tengo ferma l'altra: $\langle v, w+u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$ $\quad \forall v, u, w \in \mathbb{R}^n$

$\langle v+u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle = \langle v, cw \rangle \quad \forall c \in \mathbb{R}$

- Simmetrico $\rightarrow$ $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- È definito positivo $\rightarrow$ $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

DEF. Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Una FORMA BILINEARE è $f: V \times V \rightarrow K$ che è lineare nelle due variabili, cioè

$f(av + bu, w) = a f(v, w) + b f(u, w)$

$f(w, av + bu) = a f(w, v) + b f(w, u)$

f è detta SIMMETRICA se $f(v,w) = f(w,v)$.

ESEMPI:

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(\underbrace{(x_1,x_2)}_{\text{vettore}},\underbrace{(y_1,y_2)}_{\text{vettore}}) = \underbrace{3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_2 - 4x_1^2}_{\text{numero che dipende dalle componenti dei vettori.}}$$

È una forma bilineare? È simmetrica?

Controllo le proprietà: prendo 3 vettori $v(x_1,x_2)$, $u(z_1,z_2)$, $w(y_1,y_2)$

$$av+bu = a(x_1,x_2)+b(z_1,z_2) = (ax_1+bz_1, ax_2+bz_2)$$

$$f(av+bu, w) = f((ax_1+bz_1, ax_2+bz_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= 3(ax_1+bz_1)y_1 - 2(ax_1+bz_1)y_2 + 5(ax_2+bz_2)y_2 - 4(ax_1+bz_1)^2 =$$

$$= \underbrace{3ax_1y_1} + \underbrace{3bz_1y_1} \underbrace{-2ax_1y_2} \underbrace{-2bz_1y_2} + \underbrace{5ax_2y_2} + \underbrace{5bz_2y_2} - 4a^2x_1^2 - 4b^2z_1^2 - 8abx_1z_1$$

Ora faccio il conto della parte a destra e confronto il risultato.

$$af((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + b f((z_1,z_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= a(3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_2 - 4x_1^2) + b(3z_1y_1 - 2z_1y_2 + 5z_2y_2 - 4z_1^2) =$$

$$= \underbrace{3ax_1y_1} \underbrace{-2ax_1y_2} \underbrace{+5ax_2y_2} - 4ax_1^2 \underbrace{+3bz_1y_1} \underbrace{-2bz_1y_2} \underbrace{+5bz_2y_2} - 4bz_1^2 \quad ???$$

Non è una forma bilineare.

Se non avessi avuto "$-4x_1^2$", la forma sarebbe stata bilineare.

1) controllo che $f(av+bu, w) = af(v,w) + b f(u,w)$
2) controllo che $f(w, av+bu) = af(w,v) + b f(w,u)$
3) controllo la simmetria ad esempio con i vettori della base canonica (devo fornire un controesempio tale che $f(v,w) \neq f(w,v)$)

ESEMPIO 2: gli INTEGRALI

$f: \mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$ definita da $f(p(t), q(t)) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$ molto in seguito

ESEMPIO IMPORTANTE: ogni matrice $A \in M(n\times n, K)$ dà una forma bilineare f_A su K^n così definita: se $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)^T \in K^n$,

$$f_A(X,Y) = \underset{(1\times n)}{X^T}\ \underset{(n\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{Y} = \text{numero} = (1\times 1)$$

Si tratta di una forma bilineare, infatti

1) $\underline{f_A(aX+bZ, Y)} = (aX+bZ)^T AY = (aX^T + bZ^T)AY = aX^TAY + bZ^TAY = \underline{af_A(X,Y) + bf_A(Z,Y)}$

2) $\underline{f_A(X, aZ+bY)} = X^TA(aZ+bY) = X^TAaZ + X^TAbY = aX^TAZ + bX^TAY = \underline{af_A(X,Z) + bf_A(X,Y)}$

ESEMPIO: scrivere la forma bilineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$.

$$f_A((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 4x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 3x_2y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_2$$

Non ci sono mai quadrati o termini noti di solito, solo monomi.

ESEMPIO FONDAMENTALE SU V SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO K, di dimensione n

Fisso una base $\mathcal{B}$ e una matrice $A \in M(n\times n, K)$. Così ottengo una forma bilineare su V.

$\forall v, w \in V \quad f_A(v,w) = ?$

$[v]_\mathcal{B} = X$

$$f_A(v,w) = X^T A Y \in K$$

$[w]_\mathcal{B} = Y$

Anziché moltiplicare i vettori, che sono astratti, moltiplico le coordinate

PROPOSIZIONE: f_A è una forma bilineare SIMMETRICA $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica

Dim. $\Leftarrow$) Hp: $A^T = A$

Th: $f_A(v,w) = f_A(w,v)$

$$f_A(v,w) = X^TAY \underset{\substack{\text{matrice}\\ 1\times 1\\ \text{(numero)}}}{=} (c) \underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{trasposta}}}{=} (X^TAY)^T = Y^TA^TX \underset{(Hp)}{=} Y^TAX = f_A(w,v)$$

$\Rightarrow)$ H_p: $\forall v, w$, $f_A(v,w) = f_A(w,v)$

T_h: $a_{ij} = a_{ji}$ (A simmetrica)

TRUCCO!! $a_{ij} = e_i^T \cdot A \cdot e_j$ (per esempio, $a_{12} = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{e_1^T} \begin{pmatrix} a_{11}, \dots & \\ \vdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}$

$a_{ij} = f_A(e_i, e_j)$

uguali per ipotesi

$a_{ji} = e_j^T A e_i = f_A(e_j, e_i)$

TEOREMA. Sia V uno s.v. su K, di dimensione n, e $B = (v_1, \dots, v_n)$ una sua base. Sia f una forma bilineare su V. Se costruisco $A \in M(n \times n, K)$ in questo modo $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ allora $f = f_A$.

DIMOSTRAZIONE

Costruisco la matrice e controllo che $f = f_A$.

$$A = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) & \dots \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Devo verificare che $\forall v, w \in V$, vale $f(v,w) = f_A(v,w)$

$$f(v,w) = f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) \underset{\text{linearità}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) =$$

sia $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = X^T A Y = f_A(v,w) \quad \blacksquare$$

Cosa succede se cambio base??

Ovvero, se ho f bilineare su V di dimensione n e scelgo una base B e ho una matrice $A = M_B(f)$ tale che $a_{ij} = f(v_i, v_j)$. Se scelgo una base B' con matrice $C = M_{B'}(f)$ tale che $c_{ij} = f(w_i, w_j)$.

Che legame c'è tra A e C??

Sia $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Il legame è $\boxed{C = P^T A P}$, cioè C e A sono CONGRUENTI

- MATRICI LEGATE AD OPERATORI $\to C = P^{-1} A P \to A$ e C SIMILI

MATRICI LEGATE A FORME BILINEARI $\to C = P^T A P \to A$ e C CONGRUENTI

Dim.

Siano $v, w \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} = X$, $[w]_{\mathcal{B}} = Y$, $[v]_{\mathcal{B}'} = X'$, $[w]_{\mathcal{B}'} = Y'$ e ricordo che $X = P \cdot X'$ e $Y = P \cdot Y'$

$$f(v,w) = X^T A Y = (PX')^T A (PY') = X'^T P^T A P Y'$$

$$f(v,w) = X'^T C Y'$$

sono uguali $\forall v, w$ perché $f(v,w) = f(v,w)$!

- Questo è possibile solo se $C = P^T A P$. ☒

DEF. Un PRODOTTO SCALARE su uno spazio vettoriale V su K è una forma bilineare f simmetrica definita positiva, cioè $f(v,v) \geq 0$ e $f(v,v) = 0 \iff v = 0$.

Useremo di solito la notazione $\langle v, w \rangle = f(v,w)$ e chiameremo $(V, \langle , \rangle)$ uno SPAZIO EUCLIDEO.

- Cambiare il prodotto scalare vuol dire cambiare la matrice.

Quali caratteristiche ha la matrice A di un prodotto scalare?

1) A è simmetrica

2) A è definita positiva, cioè se $X \neq 0$, $\underbrace{X^T A X}_{\text{prodotto scalare}} > 0$, cioè ha $\det A > 0$ e anche tutti i determinanti che si ottengono da A eliminando successivamente l'ultima riga e l'ultima colonna sono positivi.

- ES. $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ NO perché non è simmetrica.

$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ è simmetrica. È definita positiva?

$$\det A = -\det\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix} = -1 \quad \underline{\text{No}}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \end{array} A=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix} \leftarrow$$ è simmetrica. È definita positiva?

$$\det A = \det\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix} = 8-4=4>0 \text{ ok}$$

tolgo ultima riga e colonna $\det\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix} = 4>0$ ok

tolgo l'ultima riga e colonna rimasti $\det(2) = 2>0$ ok

Ⓡ 9/12/2009

Teorema: le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ intorno a O sono gli operatori rappresentati in base canonica da $A\in SO(3)$.

Definizione: una rotazione τ è un movimento rigido tale che:

(1) $\tau(O)=O$

(2) $\exists\, v\neq O$ tale che $\tau(v)=v$ (asse di rotazione)

(3) τ agisce come una rotazione piana sul piano $v^\perp$

$SO(3) \rightarrow$ matrici speciali ortogonali 3×3 (determinante $=+1$).

Dimostrazione:

$\Leftarrow$ sia $A\in SO(3)$, $L_A:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$, $L_A(x)=Ax$

(1) ovvia, per definizione di applicazione lineare.

(2) se $A\in SO(3)$, $\exists\, v\neq O$ con $Av=v$, cioè 1 è autovalore di A. Infatti, $p(t)=\det(A-t\,\mathrm{Id})=0$ le soluzioni sono gli autovalori: $p(t)$ è polinomio reale di 3° grado.

So che un polinomio di 3° grado ha sicuramente almeno una soluzione.

$p(t)$ può avere:

- una radice reale e due complesse coniugate
- tre radici reali.

Sia λ una radice reale $\Rightarrow$ è un autovalore $\Rightarrow \exists v \neq 0$ con $Av = \lambda v$

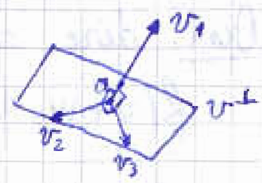
Ma essendo A ortogonale, è un movimento rigido $\Rightarrow$ conserva le distanze: $\|Av\| = \|v\|$. Ma $Av = \lambda v$, $\|\lambda v\| = \|v\| \Rightarrow \lambda = \pm 1$ per mantenere le distanze. Se $\lambda = +1$, OK. Esamino $\lambda = -1$.

- siano $z, \bar{z}$ le altre due radici, ma il prodotto degli autovalori è il determinante di A. $-1 \cdot z \cdot \bar{z} = \det A$
  $\det A = +1$ perché $A \in SO(3)$; $z \cdot \bar{z} > 0 \Rightarrow -1 \cdot (z \cdot \bar{z}) = +1$ IMPOSSIBILE.
- se ci sono 3 radici reali ho $\underset{+1}{\underset{\shortparallel}{\det A}} = (\pm 1)(\pm 1)(\pm 1)$, quindi almeno una delle tre deve essere $+1$.

(3) Considero un autovettore v con autovalore 1 (che so da (2) che esiste), sia $v_1 := \frac{v}{\|v\|}$ vettore di norma 1.

Completo v_1 a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. È sempre possibile per metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Allora (v_2, v_3) è base ortonormale di $v^\perp$.



Sia $P = M(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = (v_1 | v_2 | v_3) \in O(3)$.

Sia $C = M_{\mathcal{B}}(L_A)$: vale $C = P^{-1}AP \Rightarrow \det C = \det A \Rightarrow C \in SO(3)$

$$C = \left(L_A(v_1), L_A(v_2), L_A(v_3) \right) \qquad L_A(v_1) = L_A\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|} \underbrace{L_A(v)}_{v} = \frac{v}{\|v\|} = v_1$$

$$\begin{matrix} L_A(v_2) \\ L_A(v_3) \end{matrix} \in v^\perp \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{B}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

dove B è la matrice che rappresenta L_A nel piano $v^\perp$. B è una matrice di $O(2)$ (perché lo era C), anzi di $SO(2) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

⇒ Sia τ una rotazione. Dal teorema 5.17, $\tau(X)=AX$ con $A\in O(3)$

La rotazione la posso vedere come somma di tante rotazioni piccolissime $\tau_N \Rightarrow \frac{\vartheta}{N}$, che è vicina all'identità (piccola rotazione).

Siccome il determinante è una funzione continua, $\det(\tau_N)$ è vicino al determinante dell'identità, cioè $+1$. Quindi, non può essere -1.

$\Rightarrow A \in SO(3)$.

FORME BILINEARI

$f: V\times V \longrightarrow K$

<u>Teorema</u>: una forma bilineare è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

Sia f una forma bilineare simmetrica.

1. se $f\neq 0$, allora $\exists v$ con $f(v,v)\neq 0$.

<u>Dim.</u> dire che $f\neq 0$ significa che $\exists\, v,w$ con $f(v,w)\neq 0$. Calcolo

$$f(v+w,v+w) = f(v,v+w)+f(w,v+w) = f(v,v)+\underbrace{f(v,w)+f(w,v)}_{=\ \text{perché simmetrica}}+f(w,w) =$$

$$= f(v,v)+2f(v,w)+f(w,w)$$

$$\Rightarrow 2f(v,w) = f(v+w,v+w)-f(v,v)-f(w,w)$$ FORMULA DI POLARIZZAZIONE

So che $f(v,w)\neq 0$, allora uno di questi tre deve essere $\neq 0$, che è quello che cercavo.

2. diremo che $v\perp w$ rispetto a f se $f(v,w)=0$. Se W è un sottospazio vettoriale di V, $W^\perp := \{v\in V \mid f(v,w)=0 \ \forall w\in W\}$

Ex: dimostrare che $W^\perp$ è SSV.

3. Proposizione: sia $w \in V$ tale che $f(w,w) \neq 0$ e sia $W = \mathcal{L}(w)$. Allora $V = W \oplus W^\perp$.

Dim. (a) Th: $W \cap W^\perp = \{0\}$. Sia $v = kw \in W$. Se $v \in W^\perp \Rightarrow f(v,w) = 0$, cioè $f(kw, w) = k f(w,w) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow v = 0$

(b) Th: $V = W + W^\perp$. Sia $v \in V$, $v = \underset{\in W}{kw} + \underbrace{(v - kw)}_{\in W^\perp}$ devo trovare k tale che $\in W^\perp$

Basta scegliere $k = \dfrac{f(v,w)}{f(w,w)}$, infatti $f(v-kw, w) = 0$ perché

$$f(v-kw, w) = f(v,w) - k f(w,w) = f(v,w) - \frac{f(v,w)}{f(w,w)} f(w,w) = 0$$

Teorema di diagonalizzazione: sia V sottospazio vettoriale di dimensione finita n su K, f forma bilineare simmetrica su V.

(1) $\exists$ B' di V tale che $M_{B'}(f)$ è diagonale.

dim. se $f = 0$, OK

se $f \neq 0$, $\exists$ v tale che $f(v,v) \neq 0$. Per induzione su $n = \dim V$:

$n = 1$: vero poiché ogni matrice 1×1 è diagonale

$n-1$: suppongo vero

n: chiamo $W := \mathcal{L}(v)$; so che $V = W \oplus W^\perp$. La formula di Grassman mi dice che $\underset{n}{\dim V} = \underset{1}{\dim W} + \dim W^\perp \Rightarrow \dim W^\perp = n-1$

Se restringo $f: W^\perp \times W^\perp \to K$, per ipotesi induttiva $\exists$ una base B'' di $W^\perp$ tale che $M_{B''}(f)$ è diagonale. $B'' = (v_2, \dots, v_n)$

Ottengo B' base di V come $B' = (v, v_2, \dots, v_n)$. Controllo che $M_{B'}(f)$ sia diagonale:

$$\begin{pmatrix} * & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & & \\ \vdots & \multicolumn{2}{c}{\boxed{M_{B''}(f)}} \end{pmatrix}$$

$a_{12} = f(\underset{\text{sta in } W}{v}, \underset{\text{sta in } W^\perp}{v_2}) = 0$

$Q_{21} = 0$ per simmetria

(2) se $K = \mathbb{R}$, $\exists B = (v_1, \dots, v_n)$ tale che $f(v_i, v_j) = 0$ e $f(v_i, v_i) \in \{0, 1, -1\}$

(3) se $K = \mathbb{C}$, $\exists B = (v_1, \dots, v_n)$ tale che $f(v_i, v_j) = 0$ e $f(v_i, v_i) \in \{0, 1\}$

Se $B' = (w_1, \dots, w_n)$: so che $f(w_i, w_j) = 0$ e $f(w_i, w_i) = c_i$. Definisco

$v_i = \dfrac{w_i}{\sqrt{c_i}}$, se $c_i \neq 0$, altrimenti $v_i = w_i$

$$f(v_i, v_i) = f\left(\frac{w_i}{\sqrt{c_i}}, \frac{w_i}{\sqrt{c_i}}\right) = \frac{1}{c_i} \overbrace{f(w_i, w_i)}^{c_i} = 1$$ nei complessi.

Nei reali, se $c_i < 0$ prendo $\sqrt{-c_i}$, quindi $0, 1, -1$.

Si usa la convenzione

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} + & & \\ & - & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{C} \begin{pmatrix} + & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO $\rightarrow$ rango della matrice

SEGNATURA (p, m) $\rightarrow$ dice quanti sono i positivi (p) e quanti negativi (m).

Teorema: il numero di p e m non dipende dalla base su cui diagonalizzo.

Rango e segnatura sono <u>invarianti</u> della forma bilineare.

Una forma bilineare è NON DEGENERE se ha rango n.

ESEMPIO

$$A = \begin{array}{c} f(e_1, e_1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ simmetrica.}$$

Diagonalizzarla!! Devo seguire il teorema.

$W^{\perp} = \left\{ Y : e_1^T A Y = 0 \right\} = \left\{ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \right\}$

0 1 0 0 NON ~~OK~~

1 0 0 −1

Leggere esempio 6.12.

Il risultato della diagonalizzazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $rg = 2$ $(p, m) = (1, 1)$

Potevo anche diagonalizzare con gli autovalori (difficile in generale per 4° grado) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & & & \\ & 1-\sqrt{5} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ sempre $rg = 2$

$(p, m) = (1, 1)$

14/12/09

SPAZI EUCLIDEI

È una coppia di uno spazio vettoriale reale e un prodotto scalare.

$(V_{\mathbb{R}}^n, \langle , \rangle)$ Lo spazio vettoriale ha dimensione n, solitamente finita.

Il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica definito positivo, cioè ($\langle v, v \rangle > 0$ se $v \neq 0$). Sulla matrice A si vede se

A

$\det A > 0$

$\det A_{n \times n} > 0$

$\vdots$

$\det(a_{11}) > 0$

RISULTATI SUGLI SPAZI EUCLIDEI

Proposizione. Sia $(V^n, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo e siano $v_1, \dots, v_r$ vettori non nulli; $v_i \perp v_j$ se $i \neq j$. Allora sono linearmente indipendenti.

Dim. Sia $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$, tesi: $a_j = 0 \ \forall j$.

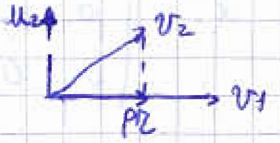
Faccio il prodotto scalare tra $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$ e v_j vettore.

$\underset{\langle 0, v_j \rangle = 0}{\langle a_1 v_1 + \dots + a_r v_r, v_j \rangle} \underset{\text{linearità } \langle\rangle}{=} a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + a_r \underset{0 \text{ perché } v_i \perp v_j}{\langle v_r, v_j \rangle} = a_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{>0 \text{ perché definito positivo}} \Rightarrow a_j = 0.$

Teorema: Sia $(V^n, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo di dimensione finita. Ogni sua base può essere ortogonalizzata con il metodo di Gram-Schmidt.

METODO DI GRAM-SCHMIDT.

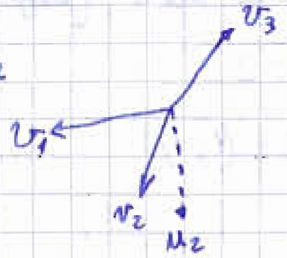
In $\mathbb{R}^2$ accadeva che



$u_2 + pr_{v_1} v_2 = v_2$

$u_2 = v_2 - pr_{v_1} v_2$

In $\mathbb{R}^3$ succede che



v_3 diventa $\perp$ se gli sottraggo la sua proiezione sia su v_1 che su u_2.

$pr_w v$ = proiezione di v su $W = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$.

Dimostrazione: parto da una base qualsiasi $(v_1, \dots, v_n)$. $w_1 = v_1$.

1) Chiamo $w_2 = v_2 - pr_{w_1} v_2$. Osservo che: 1) $w_2 \neq 0$, altrimenti v_2 sarebbe multiplo di v_1 (risultando $v_2 = pr_{w_1} v_2$) ma invece fanno parte di una base. 2) $w_2 \perp w_1$ per teorema cap. 5 G.A. 3) dalla proposizione precedente, w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti. 4) $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(w_1, w_2)$ perché $v_1 = w_1$ e $w_2 = v_2 - pr_{w_1} v_2$ dove $pr_{w_1} v_2$ è un multiplo di w_1 (o di v_1).

2) Ora costruisco $w_3 = v_3 - pr_{w_1} v_3 - pr_{w_2} v_3 = v_3 - \underbrace{\dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}}_{k} w_1 - \underbrace{\dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}}_{h} w_2$

Osservo che:

* $w_3 \neq 0$, altrimenti avrei $v_3 = k w_1 + h w_2 = k' v_1 + h' v_2$ ma devono essere lin. indip. perché parte di una base.
* $w_3 \perp w_1$, $w_3 \perp w_2$, infatti $\langle w_3, w_2\rangle = \left\langle v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2, w_2 \right\rangle =$

$= \langle v_3, w_2\rangle - \boxed{\dfrac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}}^{\text{NUMERO}} \underbrace{\langle w_1, w_2\rangle}_{= 0 \text{ perché } \perp} - \dfrac{\langle v_3, w_2\rangle}{\cancel{\langle w_2, w_2\rangle}} \cancel{\langle w_2, w_2\rangle} = 0$

Idem per $w_3 \perp w_1$.

* Dalla proposizione precedente, w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti
* $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3)$ infatti:

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2) + a_3 v_3 = (b_1 w_1 + b_2 w_2) + a_3 (w_3 + h w_1 + k w_2)$$

da passo 1.4.

Ogni combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 può essere scritta come combinazione lineare di w_1, w_2, w_3 e <u>viceversa</u>:

$$(a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3) = (b_1 v_1 + b_2 v_2) + a_3 (v_3 - h w_1 - k w_2)$$

3) Continuo così fino a $w_n := v_n - pr_{w_1} v_n - \dots - pr_{w_{n-1}} v_n$. Valgono le stesse quattro osservazioni:
* $w_n \neq 0$
* $w_i \perp w_j$
* $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti
* $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n)$ ▨

Quindi ogni spazio euclideo di dimensione finita ha base ortonormali. Infatti basta considerare $u_j := \dfrac{w_j}{\|w_j\|}$

- Quindi dire che $B = (u_1, \dots, u_n)$ è base ORTONORMALE significa che $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ oppure $M_B(\langle , \rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$.

Def: $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo e W un suo sottospazio vettoriale. Il suo COMPLEMENTO ORTOGONALE $W^\perp = \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}$

La PROIEZIONE ORTOGONALE di V su W è $\pi : V \to W$ così definita: se $v = w + u$, con $w \in W$ e $u \in W^\perp$, allora $\pi(v) := w$.

Proposizione:

1) $W^\perp$ è sottospazio vettoriale di V
2) $V = W \oplus W^\perp$
3) π è un'applicazione lineare

Dimostrazione

1) facile

2) $W \cap W^{\perp} \stackrel{?}{=} \mathcal{O}$. Sia $w \in W \cap W^{\perp}$; dunque $w \in W$ e $\langle w, w \rangle = 0$, quindi

$$\|w\|^2 = 0 \Rightarrow w = \mathcal{O} \quad \checkmark$$

$V \stackrel{?}{=} W + W^{\perp}$. Fisso una base ortonormale di W, $(w_1, \dots, w_k)$

$$v \in V, \quad v = \underbrace{(a_1 w_1 + \dots + a_k w_k)}_{\in W} + \underbrace{(v - a_1 w_1 - \dots - a_k w_k)}_{?? \in W^{\perp} ??}$$

Osservo che se scelgo $a_j = \langle v, w_j \rangle$ ottengo ciò che cerco.

$$\langle v - a_1 w_1 - \dots - a_k w_k, w_1 \rangle = \langle v, w_1 \rangle - a_1 \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{1} \underbrace{- 0 - 0 \dots - 0}_{w_j \perp w_1 \ \forall j \neq 1} =$$

$$= \langle v, w_1 \rangle - a_1 = 0 \text{ per la scelta}$$

perché base ortonormale e $\|w_1\| = 1$

Stesso passaggio per tutti gli altri vettori della base.

3) Tesi: $\pi(a_1 v_1 + a_2 v_2) \stackrel{?}{=} a_1 \pi(v_1) + a_2 \pi(v_2)$

Sia $v_1 = w_1 + u_1$ con $w_1 \in W$ e $u_1 \in W^{\perp}$

Sia $v_2 = w_2 + u_2$ con $w_2 \in W$ e $u_2 \in W^{\perp}$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 w_1 + a_1 u_1 + a_2 w_2 + a_2 u_2 = (a_1 w_1 + a_2 w_2) + (a_1 u_1 + a_2 u_2)$$

$$\pi(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$a_1 \pi(v_1) + a_2 \pi(v_2) = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$\stackrel{?}{=}$ ☒

COORDINATE IN BASE ORTONORMALE

Proposizione: sia $(V^n, \langle , \rangle)$ spazio euclideo e $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ortonormale.

1) $\forall v \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} = (\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_n \rangle)$

2) Se $X = [v]_{\mathcal{B}}$ e $Y = [w]_{\mathcal{B}}$, allora $\langle v, w \rangle = X^T \cdot Y$

3) La matrice del cambiamento di base fra due basi ortonormali è una matrice diagonale.

Dimostrazione

2) So che $f(v,w) = X^T \cdot A \cdot Y$ ma $A = I_n$ e quindi $\langle v,w \rangle = X^T \cdot Y$.

1) $X = (x_1, \dots, x_n) = [v]_B \iff v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Nel nostro caso $\langle v, v_1 \rangle = \langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n , v_1 \rangle = x_1 \langle v_1, v_1 \rangle \underset{o.n.}{\overset{\wedge}{=}} x_1$ e così via (sempre trucco $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$).

Le coordinate $\langle v, v_1 \rangle \dots$ sono proprio $x_1 \dots x_n$.

3) Sia $B' = (w_1, \dots, w_n)$ un'altra base ortonormale.

$M(B,B') = P = \left([w_1]_B \middle| \dots \middle| [w_n]_B \right)$ voglio dimostrare che è ortogonale, cioè

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} [w_1]_B \\ \vdots \\ [w_n]_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \end{pmatrix} = I_n \text{ perché } B \text{ ortonormale}$$

15/12/09

PRODOTTO SCALARE COMPLESSO

1) $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C} \right\}$ spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (complesso)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{bmatrix} \qquad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_N \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{BASE CANONICA}$$

Definisco $h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

$$h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \right) = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$$

$$h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right) = x_1^2 + \dots + x_N^2$$

- può essere 0
- non ha segno essendo complesso

$$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right) = 1 - 1 = 0$$

Non ha quindi senso definire la norma.
Definisco quindi il PRODOTTO HERMITIANO STANDARD

$$h\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = x_1\overline{y_1} + \dots + x_n\overline{y_n} = X^T \cdot \overline{Y}$$

Indicando con $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

PROPRIETÀ

1) $a, b \in \mathbb{C}$, $X, Y, W \in \mathbb{C}^n$

$$h(aX+bY, W) = (aX+bY)^T \cdot \overline{W} = aX^T\overline{W} + bY^T\overline{W} = a\,h(X,W) + b\,h(Y,W)$$

Il prodotto hermitiano standard è lineare rispetto al primo membro

2) $h(X,Y) = X^T\overline{Y} \underset{\substack{\text{essendo una} \\ \text{matrice } 1\times 1 \\ \text{(numero)}}}{=} (X^T\overline{Y})^T = \overline{Y}^T X = \overline{(Y^T\overline{X})} = \overline{h(Y,X)}$ SIMMETRIA COMPLESSA

3) $h(X,X) \in \mathbb{R}$ perché coincide con il suo coniugato

$$h(X,X) = x_1\overline{x_1} + \dots + x_n\overline{x_n} = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \geq 0$$

$$h(X,X) = 0 \iff X = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cosa succede rispetto al 2° membro?
Considero $a, b \in \mathbb{C}$ e $X, Y, W \in \mathbb{C}^n$

$$h(X, aY+bW) \overset{(2)}{=} \overline{h(aY+bW, X)} \underset{\substack{\text{linearità} \\ \text{coniugata}}}{\overset{(1)}{=}} \overline{a}\,\overline{h(Y,X)} + \overline{b}\,\overline{h(W,X)} =$$

$= \overline{a}\,h(X,Y) + \overline{b}\,h(X,W)$ ANTILINEARE → i numeri complessi a, b escono coniugati

DEF. Sia $X \in \mathbb{C}^n$. Si definisce NORMA COMPLESSA:

$$\|X\| = \begin{cases} 0 & \text{se } X=0 \\ \sqrt{h(X,X)} & \text{se } X \neq 0 \end{cases}$$

DEF. Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si definisce FORMA HERMITIANA un'applicazione $h: V \times V \to \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1) $h(aX+bY, W) = a\,h(X,W) + b\,h(Y,W) \quad \forall a,b \in \mathbb{C} \quad \forall X,Y,W \in V$

2) $h(X,Y) = \overline{h(Y,X)} \quad \forall X,Y \in V$ SIMMETRIA COMPLESSA o HERMITIANA

h è DEFINITA POSITIVA se $\forall X \in V$ si ha $h(X,X) \geq 0$ e $h(X,X) = 0 \iff X = 0$.

Analogamente a prima, si dimostra che

$$h(X, aY+bW) = \bar{a}\,h(X,Y) + \bar{b}\,h(X,W)$$

ESEMPIO

$V = \mathbb{C}_2[X]$ polinomi a coefficienti complessi di grado ≤ 2

$P \in V$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

$h: V \times V \to \mathbb{C} \qquad h(P,Q) = P(0)\overline{Q(0)} + P(1)\overline{Q(1)} + P(2)\overline{Q(2)}$

h è una forma hermitiana (verifica x esercizio)

$h(P,P) = |P(0)|^2 + |P(1)|^2 + |P(2)|^2 \geq 0$ dimostro che $h(P,P) = 0 \iff P = 0$

$0 = h(P,P) = |P(0)|^2 + |P(1)|^2 + |P(2)|^2 \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0 \iff P = 0$

Infatti, il teorema fondamentale dell'algebra dice che le soluzioni di un polinomio di grado 2 deve essere al massimo 2 soluzioni. Qui ne abbiamo 3 pertanto deve essere per forza il vettore nullo.

ESEMPIO

$$M_{m\times n}(\mathbb{C}) \qquad h: M_{m\times n}(\mathbb{C}) \times M_{m\times n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(A, B) \longrightarrow Tr(A^T \overline{B})$$

$$A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{C}) \Rightarrow A^T B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

h è una forma hermitiana definita positiva.

DEF.

Uno SPAZIO HERMITIANO è una coppia (V, h) con V spazio vettoriale complesso e h forma hermitiana definita positiva.

Sono spazi hermitiani:

* $(\mathbb{C}, \langle,\rangle)$ con $\langle,\rangle$ prodotto hermitiano canonico
* $\left(\mathbb{C}_2[X], (p,q) \to p(0)\overline{q(0)} + p(1)\overline{q(1)} + p(2)\overline{q(2)}\right)$

Sia (V, h) uno spazio hermitiano e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_N\}$ una base di V
$v \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}$ e $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_N v_N$.

Sia $h: V\times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana.

$$M_{\mathcal{B}}(h) \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \quad e \quad M_{\mathcal{B}}(h) = (h(v_i, v_j)) \quad \begin{matrix} 1\le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

$M_{\mathcal{B}}(h)$ è una MATRICE HERMITIANA, cioè $\left(\overline{M_{\mathcal{B}}(h)}\right)^T = M_{\mathcal{B}}(h)$. Infatti, so che $h(v_i, v_j) = \overline{h(v_j, v_i)}$.

$h(v, w) = ([v]_{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{B}}(h) \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$. Infatti, considerando

$$\begin{matrix} v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_N v_N \\ w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_N v_N \end{matrix} \Longrightarrow h(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j h(v_i, v_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} h(v_i, v_j) \overline{\beta}_j =$$
$$= ([v]_{\mathcal{B}})^T \cdot M_{\mathcal{B}}(h) \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

VICEVERSA: sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrice hermitiana.

$$f_A : V\times V \to \mathbb{C} \quad \text{con } f_A(v,w) = [v]_B^T \cdot A \cdot \overline{[w]_B}$$

$(\bar{A}^T) = A$ perché A hermitiana

1) Dimostro che f_A lineare rispetto al primo membro.

$$f_A(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = [a_1 v_1 + a_2 v_2]_B^T A \overline{[w]_B} = a_1 [v_1]_B^T A \overline{[w]_B} + a_2 [v_2]_B^T A \overline{[w]_B}$$
$$= a_1 f_A(v_1, w) + a_2 f_A(v_2, w)$$

2) Dimostro la simmetria complessa $f_A(v,w) = \overline{f_A(w,v)}$

$$\overline{f_A(w,v)} = \overline{[w]_B}^T \bar{A}\, \overline{[v]_B} \underset{\text{numero}}{=} \left(\overline{[w]_B}^T \bar{A}\, \overline{[v]_B}\right)^T = \overline{[v]_B}^T \bar{A}^T \overline{[w]_B} =$$
$$= [v]_B^T \cdot A \cdot \overline{[w]_B} = f_A(v,w)$$

Considero una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitiana, cioè $(\bar{A})^T = A$.
$\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di A se esiste un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ non nullo tale che $Av = \lambda v$

<u>Proposizione</u>: gli autovalori di una matrice hermitiana sono numeri reali.

Dimostrazione:

$p_A(t) = \det(A - t\,Id)$. $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$

Il teorema fondamentale dell'algebra garantisce che il polinomio ha radici. Devo dimostrare che sono reali, cioè che $\lambda = \bar{\lambda}$

$\exists\, X \in \mathbb{C}^n$ non nullo tale che $AX = \lambda X$.

Calcolo il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$

$$\langle AX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda \langle X, X\rangle$$
$$= (AX)^T \bar{X} = X^T A^T \bar{X} = X^T \overline{(\bar{A}^T X)} \overset{A \text{ hermit.}}{=} X^T A X = \langle X, AX\rangle = \langle X, \lambda X\rangle =$$
$$= \bar{\lambda} \langle X, X\rangle$$

>0 perché $X \neq 0$

$\Rightarrow \bar{\lambda}\langle X, X\rangle = \lambda \langle X, X\rangle \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda$ è reale ☺

Corollario

Le radici del polinomio caratteristico di una matrice reale simmetrica sono reali e quindi autovalori.

Dimostrazione

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica $(A = A^T)$. Se considero A complessa, $A = (\bar{A})^T$ è hermitiana e per quanto dimostrato prima tutti gli autovalori di A sono reali.

TEOREMA SPETTRALE

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A è simmetrica $\Longleftrightarrow \exists P \in M_{n\times n}$ ortogonale tale che $A = P^T \cdot D \cdot P = P^{-1} D P$ dove D è una matrice diagonale

Dimostrazione

$\Longleftarrow$ $A = P^T \cdot D \cdot P$ con P ortogonale. Dimostro che $A^T = A$, cioè che A è simmetrica.

$A^T = (P^T \cdot D \cdot P)^T = P^T D^T P = P^T D P = A$ perché D è diagonale e quindi simmetrica.

$\Longrightarrow$ Dimostro per induzione.

- $n = 1$ OK (A è un numero reale)
- suppongo vero per n
- dimostro per $n+1$:

Sia $A \in M_{(n+1)\times n+1}(\mathbb{R})$ simmetrica. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $v_1 \in \mathbb{R}^n$: $Av_1 = \lambda v_1$ con $v_1 \neq 0$ e $\|v_1\| = 1$

$v_1 \rightsquigarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$: $\langle X, Y \rangle = X^T Y$

$P = M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $M = P^T A P$ è simmetrica

$$m_{i,1} = \langle P^i, (AP)^1 \rangle = \langle P^i, APe_1 \rangle = \langle v_i, \lambda v_1 \rangle = \lambda \langle v_i, v_1 \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \neq 1 \end{cases}$$

DERIVA DALLA SIMMETRIA

$$M=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{N} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$ M è simmetrica $\Rightarrow N\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica

$\exists Q\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $Q^TNQ=D$ diagonale.

Definisco $\tilde{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0 \cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & Q\\ 0 & \end{pmatrix}\in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$

$$\tilde{Q}\tilde{Q}^T=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & Q\\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & Q^T\\ 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & QQ^T\\ 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & Id\\ 0 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}=Id.$$

Pertanto $\tilde{Q}$ è ortogonale e anche $P\tilde{Q}$ è ortogonale.

$$(P\tilde{Q})^TAP\tilde{Q}=\tilde{Q}^TP^TAP\tilde{Q}=\tilde{Q}^T\begin{pmatrix}\lambda & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & N\\ 0 & \end{pmatrix}\tilde{Q}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\cdots 00\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & Q^TNQ\\ 0 & \end{pmatrix}$$

R

16/12/09

ESERCIZIO

Diagonalizzare la forma bilineare data in base canonica da $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$. Calcolarne rango e segnatura.

Il rango si può calcolare anche sulla matrice di partenza, e vale $\operatorname{rg}A=2$ perché due righe linearmente indipendenti.

1) Scelgo un vettore tale che $f(v_1,v_1)\neq 0$. Posso scegliere $v_1=e_1$ poiché $f(e_1,e_1)=a_{11}=1$

2) Chiamo $W_1=\mathcal{L}(e_1)$ e calcolo $W_1^\perp=\{X\in\mathbb{R}^4 : X^TAe_1=0\}=$

$$=\left\{X\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, (x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=0\right\}=\{x_1+x_3=0\}$$

$W_1^\perp$ ha dimensione 3 perché ha una sola equazione.
Ora lavoro in $W_1^\perp$

Cerco $v_2 \in W_1^\perp$ tale che $f(v_2, v_2) \neq 0$. Scelgo $v_2 = e_2 \in W_1^\perp$ perché $e_2 = (0,1,0,0)$ e $x_1 + x_3 = 0 + 0 = 0$ ✓. $f(e_2, e_2) = a_{22} = 1 \neq 0$ ✓

Chiamo $W_2 = \mathcal{L}(e_2)$ e calcolo $W_2^\perp \cap W_1^\perp = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, X^T A e_2 = 0\} =$

$= \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$

Ora lavoro in $W_2^\perp$ e cerco un vettore $v_3 \in W_2^\perp \cap W_1^\perp$ tale che $f(v_3, v_3) \neq 0$. e_3, questa volta, non soddisfa $x_1 + x_3 = 0$, quindi non appartiene a $W_2^\perp \cap W_1^\perp$. Provo con $v_3 = (1,1,-1,-1)$ che $\in W_2^\perp \cap W_1^\perp$. Verifico che $f(v_3, v_3) \neq 0$:

$$(1,1,-1,-1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,1,-1,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$ Non va quindi bene.

Controllo se $f|_{W_2^\perp \cap W_1^\perp} = 0$. Prendo un generico vettore appartenente a $W_2^\perp \cap W_1^\perp$:

$$(x_1, x_2, -x_1, -x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, -x_1, -x_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $f|_{W_2^\perp \cap W_1^\perp} = 0$

Ma forma bilineare nulla vuol dire che $\forall v, w$, $f(v,w) = 0$. Ma essendo la forma simmetrica, per essere non nulla deve esistere un vettore tale che $f(v,v) \neq 0$, cosa che non avviene in questo caso

$\Rightarrow$ Scelgo v_3, v_4 a piacere (indipendenti).

La base cercata che diagonalizza è (v_1, v_2, v_3, v_4) con $v_3 = (1,1,-1,-1)$ $v_4 = (1,0,-1,0)$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$ Segnatura: $(\underset{n^\circ \text{ pos.}}{2}, \overset{n^\circ \text{ neg.}}{0})$

Una forma bilineare simmetrica è un prodotto scalare se è definita positiva, cioè se la matrice associata ha determinanti positivi. Con la matrice diagonale mi basta che sulla diagonale ci siano solo $+1$.

Un prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica di segnatura $(n, 0)$.

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un PRODOTTO HERMITIANO $\langle , \rangle$ è una forma hermitiana su V definita positiva: $\langle v, v \rangle > 0$ se $v \neq 0$.

- $\langle a v_1 + b v_2, w \rangle = a \langle v_1, w \rangle + b \langle v_2, w \rangle$ linearità sulla prima componente
- $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$ simmetria hermitiana

La matrice di passaggio (del cambiamento di base) fra due basi ortonormali su V è una matrice unitaria $(\overline{P}^T \cdot P = I)$

Definizione: sia $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$; l'AGGIUNTA di A è la matrice $\overline{A}^T = A^*$

A è detta HERMITIANA se $A = A^*$

A è detta NORMALE se $AA^* = A^* A$

Esempi di matrici normali: hermitiane, simmetriche, diagonali, unitarie, ortog.

Definizione: $P \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrici} \\ \text{invertibili}}}{GL(n, \mathbb{C})}$ è detta UNITARIA se $P^* = P^{-1}$ (caso reale: ortogonale)

$(P^* P = I)$

Tutte le matrici normali sono diagonalizzabili (in campo complesso)

Proposizione: se f è una forma hermitiana allora $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ e $M_{\mathcal{B}'}(f) = C$ sono legate da $C = P^T A \overline{P}$.

Sia V spazio hermitiano, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base ortonormale di V, $T: V \longrightarrow V$ operatore, $M = M_{\mathcal{B}}(T)$.

(1) M è hermitiana $\Longleftrightarrow \forall v,w \in V,\ \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$

T viene chiamato operatore Hermitiano.

(2) M è unitaria $\Longleftrightarrow \forall v,w \in V,\ \langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$

T viene chiamato operatore Unitario.

Dimostrazione

(1) $\Rightarrow$ Siano $v,w \in V$, $X=[v]_B$, $Y=[w]_B$. So che $\langle v,w\rangle = X^T \cdot \overline{Y}$ per le basi ortonormali.

Inoltre $[T(v)]_B = M\cdot[v]_B = MX$, $[T(w)]_B = M\cdot Y$ per ogni base.

Dunque:

$$\langle T(v), w\rangle = (MX)^T \cdot \overline{Y} = X^T M^T \overline{Y}$$

$$\langle v, T(w)\rangle = X^T(\overline{MY}) = X^T \overline{M}\,\overline{Y}$$

M è hermitiana $\Rightarrow \overline{M}^T = M \Rightarrow M^T = \overline{M}$

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

(2) $\Rightarrow \langle T(v), T(w)\rangle = (MX)^T(\overline{MY}) = X^T \underbrace{M^T\overline{M}}_{= Id \text{ perchè unitaria}}\overline{Y} = X^T\overline{Y} = \langle v, w\rangle$

(1) $\Leftarrow$ So che $\forall X,Y$ vale $X^T M^T \overline{Y} = X^T \overline{M}\,\overline{Y}$ ma questo è possibile solo se $M^T = \overline{M}$.

(2) $\Leftarrow$ Come sopra

Nel campo reale, "hermitiano" diventa "simmetrico" e "unitario" diventa "ortogonale".

Osservazione: $\overset{\text{nel reale}}{}$ $(V, \langle , \rangle)$, base B ortonormale, A simmetrica:

A rappresenta un operatore simmetrico T $(M_B(T)=A)$

A rappresenta una forma bilineare simmetrica f $(A = M_B(f))$

Che legame c'è? $X=[v]_B$, $Y=[w]_B$

$$f(v,w) = X^T A Y \underset{\text{simmetrica}}{=} X^T A^T Y = (AX)^T Y = \left([T(v)]_B^T\right)\cdot\left([w]_B\right) \underset{\text{base}}{=} \langle T(v), w\rangle.$$

Teorema spettrale per le matrici

1) Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matrice normale: allora $\exists\, P$ unitaria tale che $P^T A \bar{P} = D$ diagonale. Ogni matrice normale si può diagonalizzare con una matrice unitaria. Vale anche il viceversa.

2) Dunque se $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ è hermitiana, $\exists\, P$ unitaria tale che $P^T A \bar{P} = D$ diagonale reale. Il motivo è che abbiamo dimostrato che gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali.

3) Dunque se $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ è simmetrica, $\exists\, P$ ortogonale tale che $P^T A P = D$ diagonale

Teorema spettrale per gli operatori

(1) Sia $(V, <,>)$ uno spazio hermitiano: allora operatori normali si diagonalizzano in base ortonormale.

(2) Sia $(V, <,>)$ uno spazio euclideo: allora operatori simmetrici si diagonalizzano in base ortonormale.

Esercizi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) l'operatore che esso rappresenta su $\mathbb{R}^4$ è un operatore ortogonale?

b) diagonalizzare A se possibile.

a) devo vedere se A è ortogonale. No perchè $A \notin O(4)$ perchè le colonne non hanno tutte norma 1. Questo è possibile farlo così perchè so che la base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

b) In base ortonormale non è possibile perché non è simmetrica. Notare che A non è normale. Non posso usare il teorema spettrale.

Devo calcolare gli autovalori:

$$\det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(1-t)\left[(2-t)^2-4\right] = $$
$$= (1-t)^2 \cdot t \cdot (t-4) = 0$$

Autovalori: 1 con molteplicità algebrica 2, 0 e 4.

$$V_1 = \{X : AX = 1\cdot X\} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + \cancel{x_2} = \cancel{x_2} \\ 2x_3 + 2x_4 = x_3 \\ 2x_3 + 2x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = x_4 \\ 4x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \text{dimensione 1}$$

$\dim V_1 = 1 \implies$ non è diagonalizzabile.

Esercizio

Sia T l'operatore su $\mathbb{C}^3$ tale che $M_\mathcal{E}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) calcolare gli autovalori di T e dimostrare che $\mathbb{C}^3$ ha un sottospazio vettoriale W di dimensione 2, T-invariante, che non contiene alcun autovettore di T a coordinate reali.

b) Dimostrare che $T^{40} = I_d$

c) T è diagonalizzabile in base ortonormale?

a) $$\det\begin{pmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ 1 & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = (-1-t) + (-1-t)\left[(1-t)(-1-t)+1\right] = (-1-t)(1+1+t^2-1) =$$
$$= (-1-t)(t^2+1) = (-1-t)(t+i)(t-i)$$

Autovalori: $-1, i, -i$.

Siccome voglio T-invariante di dim 2 prendo due autospazi di dim 1 (se ne avessi uno di dim 2 prenderei quello).

Prendo $W = V_i \oplus V_{-i}$ ha dim 2 (somma diretta) ed è T-invariante infatti sia $w \in W$, $w = v_1 + v_2$

$T(w) = T(v_1+v_2) = T(v_1)+T(v_2) = iv_1 - iv_2 \in W$ ✓

Sia v un autovettore a coordinate reali: $\underset{\text{reale}}{Av} = \underset{\text{non reale se } \lambda = \pm i}{\lambda v}$

Deve essere $Av = -1 \cdot v$, cioè $v \in V_{-1}$ ma allora non può stare in $V_i \oplus V_{-i}$. Quindi W ok

b) T^{40} è rappresentato in base $\mathcal{B}$ di autovettori da D^{40}, ma

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{quindi anche } D^{40} = I_d$$

c) Sì se e solo se la matrice è normale, cioè $AA^* = AA^T$ e $A^*A = A^TA$ se sono uguali $A \cdot A^* = A^*A$. ... NO

21/12/09

Teorema spettrale per matrici e operatori simmetrici (reali)

(1) Sia $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica: allora $\exists P$ matrice ortogonale tale che $\underbrace{P^{-1}AP = P^TAP = D}_{}$, diagonale. Cioè, ogni matrice simmetrica è simile (o congruente) a una diagonale.

Definizione: un operatore $T: V \to V$, V spazio euclideo (reale) si dice <u>simmetrico</u> se è rappresentato da una matrice simmetrica <u>in base ortonormale</u>.

(2) Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio euclideo: allora ogni operatore T simmetrico si diagonalizza in base ortonormale, cioè si riesce a trovare una base ortonormale di V formata da autovettori di T.

Dimostrazione: so che $\exists\ \mathcal{B}'$ base ortonormale di V tale che $A = M_{\mathcal{B}'}(T)$ è simmetrica. Da (1), $\exists\ P$ ortogonale tale che $P^{-1}AP = D$ diagonale $= M_{\mathcal{B}}(T)$, cioè in un'altra base $\mathcal{B}$, D rappresenta l'operatore.
Ma $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ è ortogonale e quindi $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, perché $\mathcal{B}'$ è ortonormale e P è ortogonale. ■

Esempio: diagonalizzare in base ortonormale l'operatore T su $\mathbb{R}^3$ rappresentato in base canonica da $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sto considerando lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. $A = M_{\mathcal{E}}(T)$, $\mathcal{E}$ base o.n.
Quindi T è un operatore simmetrico, essendo A simmetrica.
Dal teorema spettrale è diagonalizzabile.

Calcolo gli autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} -t & 2 & 0 \\ 2 & -t & 1 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -t(t^2-1) - 2(-2t) = -t^3 + t + 4t = -t(t^2-5) = 0$$

soluzioni $\begin{cases} 0 \\ \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{cases}$ autovalori reali distinti

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prima positivi
poi negativi
poi nulli

Cerco la base ortonormale:

$V_{\sqrt{5}} \Rightarrow Ax = \sqrt{5}x$ dove $x = (x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2y = \sqrt{5}x \\ 2x + z = \sqrt{5}y \\ y = \sqrt{5}z \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{5}z \\ x = \frac{2}{\sqrt{5}}y = 2z \\ 4z + z = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}z \ \checkmark \end{cases}$$

$y = \sqrt{5}z \quad x = \frac{2}{\sqrt{5}}y = 2z \qquad z$ qualsiasi

$V_{\sqrt5} = \{(2z, \sqrt5 z, z)\} \Rightarrow$ prendo un vettore : $z=1$

$v_1 = (2, \sqrt5, 1)$ $\quad \|v_1\| = \sqrt{4+5+1} = \sqrt{10}$ ma lo voglio di norma 1

$u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt5}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ vettore di norma 1.

$V_{-\sqrt5} \ \ldots \begin{cases} 2y = -\sqrt5 x \\ 2x+z = -\sqrt5 y \\ y = -\sqrt5 z \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\sqrt5 z \\ x = 2z \\ z = z \end{cases} \quad V_{-\sqrt5} = \{(2z, -\sqrt5 z, z)\}$

$v_2 = (2, -\sqrt5, 1)$ $\quad \|v_2\| = \sqrt{4+5+1} = \sqrt{10}$ $\quad u_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-\sqrt5}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ di norma 1

$V_0 \ \ldots \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ y = 0 \end{cases} \quad V_0 = \{(x, 0, -2x)\}$

$v_3 = (1, 0, -2)$ $\quad \|v_3\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt5$ $\quad u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt5}, 0, \frac{-2}{\sqrt5}\right)$

La base cercata è $B = (u_1, u_2, u_3)$. La matrice P che diagonalizza è:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \sqrt2 \\ \sqrt5 & -\sqrt5 & 0 \\ 1 & 1 & -2\sqrt2 \end{pmatrix}$$

Deve valere $P^{-1} A P = P^T A P = D = \begin{pmatrix} \sqrt5 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizi:

Vero o falso?

☒ V ☐ F $\quad A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ simmetrica è diagonalizzabile

☐ V ☒ F $\quad A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ simmetrica ha n autovalori reali distinti. NO !!

☒ F $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ simmetrica è congruente a D diagonale

☒ F $A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ simmetrica è simile a D diagonale

☒ F Se $A = PDP^T$ con P ortogonale e D reale, allora A è simmetrica

Dire diagonalizzabile è meno restrittivo di diagonalizzabile in base o.n.
Provo a dimostrare l'ultimo. Controllo se $A^T = A$.

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T \underbrace{D^T P^T = P \cdot D}_{\text{perché diagonale}} P^T = A \quad \checkmark$$

Quindi il teorema spettrale è un se e solo se: A è diagonalizzabile se e solo se è simmetrica.

Se A non è simmetrica, allora non è diagonalizzabile <u>in base ortonormale</u>.

V ☒ Se A non è simmetrica, non è diagonalizzabile

↳ non lo è in base ortonormale, ma in un'altra base sì.

Esercizio

Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ uno spazio vettoriale e sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che $g(\underbrace{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}_{p(t)}, \underbrace{b_0 + b_1 t + b_2 t^2}_{q(t)}) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 - a_0 b_1 - b_0$

1) Verificare che g è un prodotto scalare su V.

Lo dimostro così: costruisco la matrice associata supponendo che sia una forma bilineare. Scelgo una base: $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$

$$A = M_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{i,j} = g(v_i, v_j)$ $\qquad a_{11} = g(1,1) = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 = 1$

$a_0 = 1 \quad b_0 = 1$

$a_1 = 0 \quad b_1 = 0$

$a_2 = 0 \quad b_2 = 0$

$a_{12} = g(1,t) = -1$ $a_0=1 \quad b_0=0$, $a_1=0 \quad b_1=1$, $a_2=0 \quad b_2=0$

$a_{13} = g(1,t^2) = 0$ $a_0=1 \quad b_0=0$, $a_1=0 \quad b_1=0$, $a_2=0 \quad b_2=1$

$a_{21} = g(t,1) = -1$ $a_0=0 \quad b_0=1$, $a_1=1 \quad b_1=0$, $a_2=0 \quad b_2=0$

$a_{22} = g(t,t) = 2$ $a_{23} = g(t,t^2) = 0$ $a_{31} = g(t^2,1) = 0$

$a_{32} = g(t^2,t) = 0$ $a_{33} = g(t^2,t^2) = 2$

Ora che ho costruito la matrice associata, verifico che:
$g(p(t),q(t)) = [P]_{\mathcal{E}}^T \, A \, [P]_{\mathcal{E}}$. Se vale, allora g è forma bilineare.

$$(a_0,a_1,a_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_0-a_1, -a_0+2a_1, 2a_2)\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_0-a_1)b_0 + (-a_0+2a_1)b_1 + 2a_2b_2 = a_0b_0 - a_1b_0 - a_0b_1 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

che è uguale alla definizione di $g(p(t),q(t))$ data.

Ho quindi dimostrato che g è una forma bilineare su $\mathbb{R}_2[t]$.
È simmetrica perché A è simmetrica. Verifico che è definita positiva

$\det A = 2(2-1) = 2 > 0$ ✓   tolgo ultima riga e ultima colonna

$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2-1 = 1 > 0$ ✓   " " " " " "

$\det(1) = 1 > 0$ ✓

Quindi è un prodotto scalare, essendo una forma bilineare simmetrica definita positiva.

2) Sia $W = \{p(t) \in V \mid p(1) = 0\}$. Verificare che W è un s.s.v. di V e calcolarne una base ortogonale (rispetto a g).

W è un s.s.v. se:

(a) $\underline{0} \in W$? $0(t)$ polinomio nullo, $0(1)=0$ (vero) ✓

(b) se $p_1, p_2 \in W$, allora $p_1+p_2 \in W$? $(p_1+p_2)(1) = p_1(1)+p_2(1) = 0+0=0$ ✓

(c) se $p \in W$ e $k \in \mathbb{R}$, $kp \in W$? $(kp)(1) = k \cdot 0 = 0$ ✓

Che dimensione ha W? 2 perché ho un vincolo $(p(1)=0)$.
Infatti: $W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid p(1)=0=a_0+a_1+a_2\} = \{p(t) \mid a_2 = -a_0 - a_1\}$

Cerco quindi una base di due vettori ortogonali.
Posso usare la base canonica? NO perché nessuno dei vettori $1, t, t^2$ sta in W. Infatti: $a_0+a_1+a_2 \neq 0$.

$a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=0$ $\qquad$ $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=0$

Devo cercare una base di W. Cerco due vettori che soddisfino la relazione $a_0+a_1+a_2=0$ indipendenti.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 1-t \\ v_2 = 1-t^2 \end{array}\right\} \text{ è una base di } W$$

Verifico se è una base ortogonale. Calcolo il prodotto scalare:

$$g(1-t, 1-t^2) = (1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (2,-3,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Non è una base ortogonale. Uso Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - pr_{u_1} v_2 = 1-t^2 - \frac{\overset{\text{2 già calcolato}}{g(u_1, v_2)}}{g(u_1, u_1)} \cdot (1-t)$$

$$g(u_1,u_1) = (1,-1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2,-3,0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2+3+0 = 5$$

$$u_2 = 1-t^2 - \frac{2}{5}(1-t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}t - t^2$$

$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ base ortogonale cercata.

Controllo che $u_1 \perp u_2$ (con il prodotto scalare)

$$g(u_1,u_2) = (1,-1,0)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5\\ 2/5\\ -1\end{pmatrix} = (2,-3,0)\begin{pmatrix}3/5\\ 2/5\\ -1\end{pmatrix} = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0 \quad \checkmark$$

Trovo una base ortonormale di W.

$$\|u_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \|u_2\| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+1} = \sqrt{\frac{38}{25}} = \frac{\sqrt{38}}{5}$$

$$B'_{o.n.} = \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3/\sqrt{38}\\ 2/\sqrt{38}\\ -5/\sqrt{38}\end{pmatrix}\right\}$$

3) Estendere la base di W trovata ad una base ortogonale di V.

4) Trovare una base $W^\perp$

$$W^\perp = \{p(t)\in V \mid p(t) \perp w \quad \forall w\in W\} = \{b_0+b_1t+b_2t^2 \mid g(b_0+b_1t+b_2t^2, a_0+a_1t+a_2t^2)=0 \text{ s}$$

$$a_0+a_1+a_2=0\} = (b_0,b_1,b_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ -a_0-a_1\end{pmatrix} = 0 \ldots$$

Ma è meglio ragionare con una base di W.

$$W^\perp = \{p(t)\in V \mid p(t)\perp v_1,\ p(t)\perp v_2\}$$ prendo v_1, v_2 e non u_1, u_2 perché è più semplice

$$= \left\{b_0+b_1t+b_2t^2 \,\middle|\, (b_0,b_1,b_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0,\ (b_0,b_1,b_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=0\right\}$$

$$\begin{cases}(b_0-b_1,\ -b_0+2b_1,\ 2b_2)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = b_0-b_1-(-b_0+2b_1) = 2b_0-3b_1 = 0\\[2ex] (b_0-b_1,\ -b_0+2b_1,\ 2b_2)\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = b_0-b_1-2b_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b_0 - 3b_1 = 0 \\ b_0 - b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = b_0 \\ b_1 = \frac{2}{3} b_0 \\ b_2 = \frac{b_0 - b_1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = b_0 \\ b_1 = \frac{2}{3} b_0 \\ b_2 = \frac{1}{6} b_0 \end{cases}$$

$W^\perp = \left\{ b_0 + \frac{2}{3} b_0 t + \frac{1}{6} b_0 t^2 \right\}$. $\dim W^\perp = 1$

Una sua base è, ad esempio con $b_0 = 1$, $v_3 = 1 + \frac{2}{3} t + \frac{1}{6} t^2$

3) So dalla teoria che $V = W \oplus W^\perp$ e una base ortogonale di V si ottiene unendo una base ortogonale di W con una di $W^\perp$: (u_1, u_2, v_3) è la base cercata.

ESERCITAZIONI

21/12/09

6.10.

Diagonalizzare in base ortonormale $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calcolo gli autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 2 & 0 \\ 2 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t\left((2-t)^2 - 4\right) = -t\left(t^2 - 4t\right) = -t^2(t-4) = 0$$

avl: 0, con molteplicità algebrica 2, e 4.

Una matrice simmetrica ha sempre radici del polinomio caratteristico REALI.

Nell'autospazio di 0 devo trovare due vettori, essendo molt. alg. 2.

2. Calcolo gli autospazi:

$$V_4 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 4X\} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x+2y = 4x \\ 2x+2y = 4y \\ 0 = 4z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad V_4 = \{(x,x,0)\} = \{(y,y,0)\} \qquad \dim V_4 = 1$$

$$V_0 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 0 \cdot X = 0\} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2x+2y = 0 \\ 2x+2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

$$V_0 = \{(x, -x, \underset{\text{libera}}{z})\}$$ $\dim V_0 = 2$, cioè 0 ha molteplicità geometrica 2.

3. Scelgo una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ prendendo una base ortonormale in ogni autospazio.

In V_4 scelgo $w_1 = (1,1,0)$ ma non è ortonormale $\Rightarrow$ divido per la sua norma $\|w_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

In V_0 devo scegliere due vettori fra loro $\perp$:

$w_2 = (1,-1,0)$ divido per la norma $\|w_2\| = \sqrt{2}$ $\qquad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$w_3 = (0,0,1)$ divido per la norma $\|w_3\| = 1$ $\qquad v_3 = (0,0,1) = w_3$

4. Dunque la base cercata è (v_1, v_2, v_3) e la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ perché $v_1 \in V_4$

5. Verifico che $P^T A P = D$

$$P = M(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{in questo caso}}{=} P^T$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \quad \checkmark$$

6.9. Dire quali sono simmetriche, definite positive, ortogonali, hermitiane.

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1-3i \\ 1+3i & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Simmetriche: B, D

- Hermitiane, cioè $A^T = \bar{A}$ (nel reale è uguale a simmetrica): B, D, C

$$A^T = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} -i & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T \neq \bar{A} \quad A \text{ non hermitiana}$$

OSS. se A è hermitiana, $a_{ii} \in \mathbb{R}$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 1+3i \\ 1-3i & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1+3i \\ 1-3i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad C \text{ è hermitiana}$$

- Definite positive:
  - A no $\quad i \not> 0$
  - B no $\quad 1 > 0 \quad \det B \not> 0 = -1$
  - C no $\quad 3 > 0 \quad \det C = -(1-3i)(1+3i) = -1+9i^2 <$
  - D no $\quad 0 \not> 0$

- Ortogonali: concetto SOLO REALE

  B sì poiché le due colonne sono $\perp$ e di lunghezza 1.

D no per lo stesso motivo $\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2} = 2 \neq 1$.

6.8. Dire quali sono forme bilineari simmetriche e quali forme hermitiane.

- $h(v,w) = v \times w$ su $\mathbb{R}^3$ $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

NO poichè $v \times w \in \mathbb{R}^3$ e non a $\mathbb{R}$

- $f((x,y,z),(a,b,c)) = 3ax + 2by + 4xc - 3xb$ $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ok

Due modi:

(1) Controllare che $f(kx_1 + hx_2, (a,b,c)) = kf(X_1,(a,b,c)) + hf(X_2,(a,b,c))$ e idem al secondo posto

(2) Provo a costruire la matrice:

$a_{ij} = f(e_i, e_j)$

$a_{11} = f(e_1,e_1) = f((1,0,0),(1,0,0)) = 3$

$a_{12} = f(e_1,e_2) = f((1,0,0),(0,1,0)) = -3$

$a_{13} = 4$ $a_{21} = 0$ $a_{22} = 2$

$a_{23} = 0$ $a_{31} = 0$ $a_{32} = 0$ $a_{33} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora vediamo se A riproduce f, cioè se $f((x,y,z),(a,b,c)) \overset{?}{=}$

$$= (x,y,z) \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (3x, -3x+2y, 4x) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3ax - 3bx + 2by + 4xc$$ VER

Dunque f è forma bilineare. Non è simmetrica perchè A non è simmetrica.

- g su $\mathbb{C}^2$, data da $g((z_1,z_2),(w_1,w_2)) = z_1 w_1 + \overline{z_1} w_2$

g è una forma hermitiana su $\mathbb{C}^2$??

1. Controllo dominio e codominio

$g: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ok

2. Se fosse una forma hermitiana, la sua matrice in base canonica sarebbe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = f((1,0),(1,0)) = 1$ $a_{21} = f((0,1),(1,0)) = 0$

$a_{12} = f((1,0),(0,1)) = 1$ $a_{22} = f((0,1),(0,1)) = 0$

3. Controllo se la matrice riproduce o meno g.

$$(z_1, z_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix} = (z_1, z_1)\begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix} = z_1\overline{w_1} + z_1\overline{w_2}$$ che è diversa da g

$x^T \cdot A \cdot \overline{Y}$

g non è una forma hermitiana.

6.7. $f: \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ data da $f((z_1,z_2),(w_1,w_2)) = i z_1 \overline{w_2} - i z_2 \overline{w_1}$ dire se è un prodotto hermitiano su $\mathbb{C}^2$.

(1) devo controllare se è una forma hermitiana. Lo faccio con la matrice:

l'eventuale matrice in base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = f((1,0),(1,0)) = 0$

$a_{12} = f((1,0),(0,1)) = i$

$a_{21} = f((0,1),(1,0)) = -i$

$a_{22} = f((0,1),(0,1)) = 0$

$$(z_1, z_2)\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix} = (-z_2 i, z_1 i)\begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix} = -z_2\overline{w_1}\, i + z_1\overline{w_2}\, i$$ ok

f è una forma bilineare (non simmetrica).

(2) Controllo che sia hermitiana:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{OK}$$

f è una forma hermitiana su $\mathbb{C}^2$.

(3) Devo vedere se A è definita positiva con il metodo dei determinanti:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \det 0 = 0 \not> 0 \qquad \underline{No}$$

f non è un prodotto hermitiano.

Trovare un $v \neq 0$ tale che $f(v,v) \leq 0$. Ad esempio $v = e_1$, $f(e_1,e_1) =$

Esercizio

Sia $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Sia $F: V \rightarrow V$ operatore, definito così: $F(X) = A \cdot X - X \cdot A$

(1) Calcolare $M_{\mathcal{E}}(F)$ e $M_{\mathcal{B}}(F)$ con $\mathcal{B} = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_4} \Big\}$

Calcolo dapprima una formula per F.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \qquad F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 + x_4 - x_1 \\ -x_3 & -x_3 \end{pmatrix}$$

$M_{\mathcal{E}}(F)$ dove $\mathcal{E} = (e_{ij}) = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$M_{\mathcal{E}}(F) = \Big([F(v_1)]_{\mathcal{E}}, [F(v_2)]_{\mathcal{E}}, [F(v_3)]_{\mathcal{E}}, [F(v_4)]_{\mathcal{E}} \Big)$$

$F(e_{11})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ $F(e_{12})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $F(e_{21})=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ $F(e_{22})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$F(e_{11})=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=0e_{11}-1e_{12}+0e_{21}+0_{22}$

...

$M_{\mathcal{E}}(F)=\left(\begin{array}{c|c|c|c}0&0&1&0\\-1&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)$ Osservo che $M_{\mathcal{E}}(F)$ non è invertibile perché ha due colonne uguali e dunque F non è invertibile.

Ora calcolo $M_{\mathcal{B}}(F)$ nello stesso modo

$F(v_1)=\left[\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ $F(v_2)=\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ $F(v_3)=\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ $F(v_4)=\left[\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$

$$M_{\mathcal{B}}(F)=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&-1&1\\-1/2&1/2&0&1\\-1/2&1/2&1&0\end{pmatrix}$$

Oppure potevo ricordarmi che $M_{\mathcal{B}}(F)=P^{-1}M_{\mathcal{E}}(F)P$ con $P=M(\mathcal{E},\mathcal{B})$.

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix}a&c+d\\c-d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}a=0\\c+d=-1\\c-d=0\\b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=0\\b=0\\c=-1/2\\d=-1/2\end{cases}$

2) $\begin{pmatrix}a&c+d\\c-d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}a=0\\c+d=1\\c-d=0\\b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=0\\b=0\\c=1/2\\d=1/2\end{cases}$

3) $\begin{pmatrix}a&c+d\\c-d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}a=1\\c+d=1\\c-d=-1\\b=-1\end{cases}$ $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=0\\d=1\end{cases}$

4) $\begin{pmatrix}a&c+d\\c-d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}a=-1\\c+d=1\\c-d=1\\b=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=1\\d=0\end{cases}$

(2) Calcolare $M(\mathcal{C},\mathcal{B}) = P$ e $M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = P^{-1}$

devo scrivere i vettori di $\mathcal{B}$ in base canonica; basta metterli in colonna come vettori.

$$M(\mathcal{C},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

det det

$\det M(\mathcal{C},\mathcal{B}) \neq 0$ ovviamente, visto che devo calcolare l'inversa.

Ora trovo $M(\mathcal{B},\mathcal{C})$, ad esempio usando la formula dell'inversa (oppure $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots$).

$$\det P = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

diverso da ± 1 perché non è una base ortonormale

$$B: \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora faccio la trasposta di B e divido per $\det P = -2$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Controllo $P \cdot P^{-1} = I_4 = P^{-1}P$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

(3) Sia v con $[v]_{\mathcal{C}} = (3,2,1,1)$, calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$

(4) Sia v con $[v]_{\mathcal{B}} = (-1,1,8,1)$, calcolare $[v]_{\mathcal{C}}$

(5) Calcolare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$.

22/12/09

Dire se $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sono congruenti.

Def. A e B si dicono congruenti se $\exists P$ invertibile tale che $B=P^T \cdot A \cdot P$

Essendo $B=I_2$, mi basta vedere se $A=I_2$. Ci sono due modi:

- osservo che A è una matrice simmetrica, quindi diagonalizzabile in base ortonormale. Vediamo chi è la matrice diagonale D: Calcolo gli autovalori di A

$$\det\begin{pmatrix}1-t & 1\\ 1 & 4-t\end{pmatrix} = (1-t)(4-t)-1 = t^2-5t+4-1=0 \quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 3}}{2} = \begin{cases}\frac{5+\sqrt{13}}{2}\\ \frac{5-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{5+\sqrt{13}}{2} & 0\\ 0 & \frac{5-\sqrt{13}}{2}\end{pmatrix}$$ Gli autovalori sono entrambi positivi.

Provo invece il modo diretto:

- $B=I_d=P^T A P$ Cerco la P. Moltiplico per $Q=P^{-1}$ a destra

$I_2 \cdot Q = P^T A \underbrace{P \cdot Q}_{I}$ $\quad Q=P^T A$ moltiplico per Q^T a sinistra

$Q^T Q = \underbrace{Q^T P^T}_{(PQ)^T=I_2} A$ ottengo $Q^T Q = A$ Cerco dunque la $Q=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$

$Q^T=\begin{pmatrix}x & z\\ y & w\end{pmatrix}$ $\quad Q^T \cdot Q = A \quad \begin{pmatrix}x & z\\ y & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x^2+z^2 & xy+zw\\ xy+zw & y^2+w^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \begin{cases}x^2+z^2=1\\ xy+zw=1\\ y^2+w^2=4\\ \det Q = xw-yz\neq 0\end{cases}$$ vado ad occhio $$\begin{cases}z=0\\ x=\pm 1\\ w\neq 0 \to w=\pm\sqrt{3}\\ y=\pm 1\end{cases}$$

Scelgo $\begin{cases} z=0 \\ x=1 \\ y=1 \\ w=\sqrt{3} \end{cases}$ $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}=P^{-1}$

La sua inversa è $P=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

${}^tPAP=I_2$? Verifico

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ OK

EX 3 : Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori (diagonalizzare) dell'operatore $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z)=(2x+y, x+3y+z, y+2z)$ oppure dire perchè non esiste.

Controllo se $A=M_e(T)$ è simmetrica:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ $\exists$ la base cercata poichè A è simmetrica.

Calcolo gli autovalori:

$$\det\begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 3-t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix}=(2-t)\left[(3-t)(2-t)-1\right]-1(2-t)=0$$

$$(2-t)\left[6-3t-2t+t^2-1-1\right]=0 \quad (2-t)(t^2-5t+4)=0 \quad (2-t)(t-1)(t-4)=0$$

autovalori: 2, 1, 4

Ora devo scegliere un vettore di norma 1 in ogni autospazio

$$V_2 = \{X \mid AX = 2X\} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{2x} + y = \cancel{2x} \\ x + 3y + z = 2y \\ y + \cancel{2z} = \cancel{2z} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \\ y = 0 \end{cases} \quad V_2 = \{(x, 0, -x)\} \quad v_1 = (1, 0, -1) \quad \|v_1\| = \sqrt{2}$$

$$w_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$$

$$V_4 = \{X \mid AX = 4X\} \quad \begin{cases} 2x + y = 4x \\ x + 3y + z = 4y \\ y + 2z = 4z \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x - 2x + z = 0 \\ y = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2x \\ y = 2z \end{cases} \quad V_4 = \{(z, 2z, z)\}$$

$$v_2 = (1, 2, 1) \quad \|v_2\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \qquad w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$V_1 = \{X \mid AX = X\} \quad \begin{cases} 2x + y = x \\ x + 3y + z = y \\ y + 2z = z \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ x - 2x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \quad V_1 = \{(z, -z, z)\}$$

$$v_3 = (1, -1, 1) \quad \|v_3\| = \sqrt{3} \qquad w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\} \quad e \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stesso ordine di come ho calcolato w_1, w_2, w_3

ESERCITAZIONI

9/11/2009

$\mathbb{R}^4 \quad r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad r_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(r_1, r_2, r_3, r_4)$ è una base? Calcolo il rango di A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riduco} \\ \text{a gradini}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{prop.} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$\Rightarrow rg\, A = 3 < 4 \Rightarrow r_1, r_2, r_3, r_4$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$ non sono una base

I tre vettori indipendenti sono r_1, r_2, r_3.

La dimensione dello spazio generato è 3.

$r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(r_1, r_2, r_3, \cancel{r_4})$? Di fatto lo spazio generato da r_1, r_2, r_3

$r = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 \qquad$ con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A' \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Confronto il rango della matrice A' con il rango della matrice completa. Se sono uguali, il sistema ha soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{riduco} \\ \text{a} \\ \text{gradini}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rango 3 come A' $\Rightarrow$ sistema compatibile

$\Rightarrow$ esiste una sola terna a_1, a_2, a_3 per scrivere v.

Dato un insieme di matrici verificare se questa famiglia può essere una base per $M_{2\times 2}$.

$$\left\{ \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{A_2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{A_4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Che dimensione ha $M_{2\times 2}$, mi chiedo?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formano una base

Sono lin. indipendenti? $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ SI lo sono perchè ottengo la matrice nulla solo annullando a, b, c, d

$\Rightarrow$ La dimensione dello spazio è 4.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le 4 matrici sono linearmente indipendenti base.

In realtà, se scrivo le matrici 2×2 come vettori 4×1, ottengo

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

In generale, le matrici $M_{n\times n}$ generano uno spazio di dimensione n^2.

Trova la dimensione dello spazio e una base

$Sol(A|0)$ dove $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \underset{\text{gradino}}{=} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{0}\end{pmatrix}$ ← proporzionale a

2 equazioni → 2 incognite su 3

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \\ z=z \text{ arbitraria} \end{cases} \quad \begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=k \end{cases} \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix} \forall k\in\mathbb{R}\right\}$$

Ma voglio scrivere $V = \mathcal{L}(\quad)$

$$V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

dimensione: 1

base: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Dato uno spazio U e un sottospazio $V \subset U$:

$\dim V \leq \dim U$

La dimensione non c'entra con il numero di generatori.

dim $\leq$ n° generatori

3.1 → 3

$Sol(A|0) \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & -1 \end{pmatrix}$ al variare di t in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & t-1 & 1-t & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & t-1 & 1-t & -2 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

se $t \neq 1$ $\quad rg A = 3$ → 3 incognite indipendenti, 1 incognita arbitraria

→ 1 parametro → dimensione 1

dim = n° incognite − rango

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (t-1)x_3 + x_4 = 0 \\ (t-1)x_2 + (1-t)x_3 - 2x_4 = 0 \\ (1-t)x_3 = 0 \\ x_4 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -k - \frac{2k}{t-1} = -k\frac{t+1}{t-1} \\ x_2 = \frac{2k}{t-1} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = k \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{t+1}{t-1} \\ \frac{2}{t-1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{moltiplico per } t-1 \rightarrow \mathcal{L}\begin{pmatrix} -t-1 \\ 2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

se $t = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg A = 2$ → 2 incognite indipendenti e 2 arbitrarie

$$\Rightarrow \dim Sol(A|0)|_{t=1} = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_4 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -h \\ x_2 = h \\ x_3 = k \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \overbrace{h\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{base}}$$

$\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ Questi due vettori costituiscono una base.

10/01/09

Data $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\in C^\infty : f''+f=0\}$

1) W sott. vett. di $\mathcal{F}$?, $U=\mathcal{L}(\cos t,\sin t)$ sott. vett. di W? dim U?

2) $U'=\mathcal{L}(\cos t,\sin t,t^3)$?

U' sott. vett. di W? di $\mathcal{F}$? Base?

i) $f=0\in W$

ii) $f_1\in W,\ f_2\in W\Rightarrow f_1+f_2\in W\quad \forall f_1,f_2$

iii) $f_1\in W\to Kf_1\in W\quad \forall K\in\mathbb{R}$

i) $f(x)=0\quad f'=0\quad f''=0\quad f''+f'=0$ <u>sì</u>

ii) $f_1''+f_1=0\quad f_2''+f_2=0\to f_1+f_2=g\quad g'=f_1'+f_2'\quad g''=f_1''+f_2''$

$g''+g=f_1''+f_2''+f_1+f_2=(f_1+f_1'')+(f_2+f_2'')=0$ <u>sì</u>

iii) $f''+f=0\to Kf\overset{?}{=}0\to Kf''+Kf=0\quad K(\underbrace{f''+f}_{0})=0\Rightarrow Kf=0$ <u>sì</u>

U è sicuramente uno spazio vettoriale, per come è stato definito. Ora devo vedere se i suoi elementi sono anche di W. Mi basta vedere se i suoi generatori stanno in W.

$f_1=\cos t\overset{?}{\in}W\qquad f_1'=-\sin t\qquad f_1''=-\cos t$

$f_1+f_1''=\cos t-\cos t=0\ \forall t\in\mathbb{R}$ <u>ok</u>

$f_2=\sin t\overset{?}{\in}W\qquad f_2'=\cos t\qquad f_2''=-\sin t$

$f_2+f_2''=\sin t-\sin t=0\ \forall t\in\mathbb{R}$ <u>ok</u>

$\mathcal{L}(f_1, f_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contenuto}}}{\subset} W \Rightarrow U$ è un sottospazio vettoriale.

Devo trovare $\dim U \to$ ho bisogno di una base (poi conto da quanti vettori è formata $\to$ ho due generatori, verifico se sono L.I.

$a \sin t + b \cos t \overset{?}{=} 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$? Prendo $t = 0 \to b = 0$

Prendo $t = \frac{\pi}{2} \to a = 0$

Quindi $(\sin t, \cos t)$ sono linearmente indipendenti e generatori, quindi sono una base per U, quindi $\dim U = 2$.

U' sottospazio vettoriale sì per come è scritto. Almeno ssv. di $\mathcal{F}$.

Verifico che $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{SI}}}{\sin t}$, $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{SI}}}{\cos t}$ da prima e t^3 siano anche $\in W$

$f_3 = t^3 \quad f_3' = 3t^2 \quad f_3'' = 6t$

$f_3 + f_3'' = 0 \quad t^3 + 6t = 0$ NO $\forall t \quad f_3 \notin W$

U' non contenuto in W.

Trovo una base di U'. Guardo se $\sin t, \cos t, t^3$ sono L.I.

$a \cos t + b \sin t + c t^3 = 0 \qquad t = 0 \to a = 0$

$t = \pi/2 \to b + c\frac{\pi^3}{8} = 0$

$t = \pi \to -a + c\pi^3 = 0$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c\frac{\pi^3}{8} = 0 \\ c\pi^3 - a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{OK}}$$

I tre generatori sono una base.

$\dim U' = 3$

3.1. Siano W e U sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V

1) Dimostrare che $W \cap U$ è un sottospazio vettoriale di V

2) Provare che $W \cup U$ non è un sottospazio di V

3) Dare una condizione necessaria e sufficiente perché $W \cup U$ sia sottospazio di V.

1) $\left.\begin{array}{l} \forall w_1, w_2 \in W \rightarrow w_1, w_2 \in V \\ w_1 + w_2 \in W \\ kw \in W \quad \forall k \end{array}\right\}$ W sottospazio di V

$\left.\begin{array}{l} \forall u_1, u_2 \in U \rightarrow u_1, u_2 \in V \\ u_1 + u_2 \in U \\ ku \in U \quad \forall k \end{array}\right\}$ U sottospazio di V

$W \cap U = \{ v \in V : v \in W \ \underline{e}\ v \in U \}$ $\quad U \cap W \subset V$ visto che $v \in V$.

Devo verificare che sia un s.s.v.

$v_1, v_2 \in W \cap U \Longrightarrow v_1 + v_2 \in W \cap U \ , \ kv_1 \in W \cap U$

$\left.\begin{array}{l} v_2 \in W \\ v_1 \in W \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in W \ e\ kv_1 \in W$

$\left.\begin{array}{l} v_1 \in U \\ v_2 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \ e\ kv_1 \in U$

$\Rightarrow \begin{array}{l} v_1 + v_2 \in W \cap U \\ kv_1 \in W \cap U \end{array}$ $\underline{OK}$

2) $W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ $\quad \{(1,0,0), (-\frac{1}{2},0,0), \overset{v_1}{(\sqrt{2},0,0)}, (0,0,0), \overset{v_2}{(0,0,7)}, (0,0,-\frac{1}{4}) \dots \} = W \cup U$

$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\quad v_1 + v_2 = (\sqrt{2}, 0, 7) \notin W \cup U \Rightarrow$ non è un s.s.v.

↳ perché la prima o la terza componente deve essere 0.

3) Se fossi in questa situazione  $A \cup B = A$ o  $A \cup B = B$

Quindi $U \cup W$ sottospazio $\iff U \subseteq W$ o $W \subseteq U$

È possibile che $U \cup W$ sia sottospazio ma non sia vero ?

Vuol dire $\exists\, u \in U,\ u \notin W$

$\exists\, w \in W,\ w \notin U$

$w, u \in U \cup W$ che supponiamo sia s.v., allora $u + w \in U \cup W$.

Chiamo $v = u + w \in U \cup W$ $v \in U \cup W \Rightarrow \underline{v \in W}$ o $v \in U$

Se faccio $v - w = u$, ma $v \in W$ per ipotesi, $w \in W \Rightarrow v - w \in W$

$\Rightarrow u \in W$ assurdo!!

Non è vero che $U \cup W$ è un sottospazio se non vale $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.

Uno spazio vettoriale può essere descritto dai suoi generatori oppure dalle sue equazioni cartesiane. Devo essere in grado di passare da una descrizione all'altra.

* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{risolvo il sistema}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_2 \\ \\ \end{pmatrix}$ $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$

* $W \subseteq \mathbb{R}^4$ $W = \mathcal{L}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$, voglio l'equazione cartesiana.

I generatori non sono in questo caso L.I. (ultima riga nulla)

$\overset{v}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} \in W \xrightarrow{\text{matrice dei 5 vettori}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right)$ gradino

Scrivo v come combinazione lineare di: v_1, v_2, v_3, v_4 : $v = \underset{?}{a_1} v_1 + \underset{?}{a_2} v_2 + \underset{?}{a_3} v_3 + \underset{?}{a_4} v_4$

Voglio che quel sistema abbia soluzione.
La matrice che ho trovato è quella completa. Confronto il rango dell'incompleta (3) con quello della completa (3 solo se $x_4=0$).
Se $x_4=0$, il sistema è risolubile.
$\Longrightarrow x_4=0$ equazione cartesiana di W

Considero ora $W = \mathcal{L}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{L.I.}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}}_{\text{somma}}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{differenza}}\right)$ so che avrà dimensione 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right)$$

La matrice incompleta ha rango 2. Per essere compatibile il sistema, la completa deve avere rango 2, e ce l'ha solo se

$$\begin{cases} x_4=0 \\ x_3-x_1=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{equazioni cartesiane}$$

16/11/09

SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA n

Teorema: sia V uno s.v. sul campo K di dimensione n, e sia W un suo sottospazio vettoriale.

1) W ha una base e $\dim W \leq n$

2) se $\dim W = \dim V$, allora $W=V$

dimostrazione

* se $W=0$, una sua base è il vuoto e $\dim W = 0 \leq n$
* se $W \neq 0$, sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$; considero $\mathcal{L}(w_1)$
  ** $\mathcal{L}(w_1) = W$ allora w_1 è una base di W (genera e indipendente)
  ** $\mathcal{L}(w_1) \subset W$ allora $\exists\, w_2 \in W$, $w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$

Considero $\mathcal{L}(w_1, w_2)$:

*** $\mathcal{L}(w_1,w_2) = W$ allora (w_1, w_2) è una base di W (generatori e linearmente indipendenti perché $w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$

*** $\mathcal{L}(w_1,w_2) \subset W$ allora $\in w_3 \in W$, $w_3 \notin \mathcal{L}(w_1,w_2)$; considero $\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$ ......

Sicuramente mi fermo prima di arrivare a $n+1$ vettori, poiché V può avere al più n vettori linearmente indipendenti.
Quindi mi fermo e cioè trovo una base di W con al più n vettori. Ho dimostrato la prima tesi.

Questo modo di procedere per trovare una base di un sottospazio si chiama COMPLETAMENTO A BASE.
$\{w_1, \dots, w_k\}$ indip.: ne aggiungo uno alla volta degli altri fino ad ottenere una base.

Dimostro ora la <u>seconda</u> parte:
suppongo che $\dim W = n = \dim V$; th: $V = W$
So che $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \dots, w_n)$ con $(w_1, \dots, w_n)$ base di $W \Rightarrow w_1, \dots, w_n$ sono n vettori di V (essendo W ssv di V) linearmente indipendenti (base)
$\Rightarrow$ poiché V ha dimensione n, sono una base di $V \Rightarrow$
$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) = W$. ∎

<u>ESEMPIO</u>: Completare $(1,2,3) = v_1$ a base di $\mathbb{C}^3$, ovvero scrivere $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, w_2, w_3)$.

$\mathcal{L}(v_1) \overset{?}{=} \mathbb{C}^3$? NO, perché i generatori devono essere almeno 3.
Allora trovo $w_2 \in \mathbb{C}^3$, $w_2 \notin \mathcal{L}(v_1)$.

Per esempio $w_2 = (1,0,0)$ va bene? Sì perché non è multiplo di v.

$\mathcal{L}(v_1, w_2) = \mathbb{C}^3$? NO, perché almeno 3 generatori

PROPRIETÀ

1) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = I_n$

<u>dim:</u> $M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \left([v_1]_{\mathcal{B}} \vdots \cdots \vdots [v_n]_{\mathcal{B}} \right)$ oppure $v_j = \_\, v_1 + \ldots + \_\, v_n =$

$v_j = 0\, v_1 + \ldots + 1 \cdot v_j + \ldots + 0\, v_n$

2) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}') \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{B}}$

<u>dim:</u> prendo $v \in V$ e chiamo $[v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ $[v]_{\mathcal{B}'} = (y_1, \ldots, y_n)$

quindi $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ con $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

$v = y_1 w_1 + \ldots + y_n v_n$ $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$

$v = y_1 \cdot (p_{11} v_1 + \ldots + p_{n1} v_n) + \ldots + y_n (p_{1n} v_1 + \ldots + p_{nn} v_n) =$

$= \underbrace{(p_{11} y_1 + \ldots + p_{1n} y_n)}_{\substack{\text{prima riga di } P \\ \text{moltiplicata per le } y \\ \| \\ x_1 \text{ perché davanti a } v_1}} v_1 + \ldots + \underbrace{(p_{n1} y_1 + \ldots + p_{nn} y_n)}_{\substack{\text{ultima riga di } P \\ \text{moltiplicata per le } y \\ \| \\ x_n}} v_n$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

16/11/09

ESERCITAZIONE

Sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : 2x_1 + 2x_3 - x_4 = x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$

Trovare dimensione e una base per $V \cap W$ e per $V + W$

C O P I A T O / N T E O R I A

$V+W = \mathcal{L}$ (generatori V; generatori W)

$V \cap W : \begin{cases} \text{eq. cart. } V \\ \text{eq. cart. } W. \end{cases}$

Trovo l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

matrice completa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & -3 & 2 & x_2 \\ -1 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} =$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_4+x_1+x_2 \end{array}\right)$$

matrice incompleta $\rightarrow$ rango 2

matrice completa $\rightarrow$ deve avere rango 2

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_4 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ equazione cartesiana di V

Trovo i generatori di W

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{1}{2} x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + \frac{x_4}{2} \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} =$

$= x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Generatori di $V+W$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ non metto V_3 perché la matrice di V aveva rango 2 e quindi solo due erano indipendenti.

x2

opposto di
⇓
scarto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det = -2 \Rightarrow 3 \text{ vettori lin. ind.}$$

$$\Downarrow$$

$$rg = 3$$

$(V_1, V_2, W_1) = B_{V+W}$ e $\dim V+W = 3$.

Intersezione:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V \cap W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e ha dimensione 1.

• $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f(v) = 2v.$

Verifico sia un'applicazione lineare:

$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$f(V_1 + V_2) = 2(V_1 + V_2) = 2V_1 + 2V_2 = f(V_1) + f(V_2)$ ✓

$f(kV_1) = 2 \cdot (kV_1) = 2kV_1 = k \cdot f(V_1)$ ✓

• $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (x,y,z) + (1,1,1)$

$f(0) = (0,0,0) + (1,1,1) = (1,1,1) \neq 0$ NO

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b) = (a^2, a+b) \qquad v = (a,b)$

$f(0) = (0^2, 0+0) = 0$ ✓

$f(kV) = f(ka, kb) = (k^2a^2, ka + kb) \neq k\, f(a,b) = (ka^2, k(a+b))$ NO

• $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(a,b,c) = (a+2b-c,\ a-b-c) \qquad v = (a,b,c)$

$f(0) = (0,0)$ ✓

$f(kV) = f(ka, kb, kc) = (ka + 2kb - kc,\ ka - kb - kc) = k(a+2b-c,\ a-b-c) = k f(v)$ OK

$f(V_1+V_2) = f(a+a', b+b', c+c') = (a+a'+2b+2b'-c-c',\ a+a'-b-b'-c-c') =$

$= ((a+2b-c)+(a'+2b'-c'),\ (a-b-c)+(a'-b'-c')) = f(v) + f(v')$ OK

Date $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+2y,\ 2x+ky+z,\ -x+2y+kz)$

trovare per quali valori di k f è isomorfismo $\Leftrightarrow$ f biettiva.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ suriettiva $\rightarrow rg A = \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ iniettiva $\rightarrow Sol(A|0)$

$rg A = n°$ colonne $\Rightarrow$ iniettiva
$rg A = n°$ righe $\Rightarrow$ suriettiva $\Longrightarrow$ $rg A = n°$ righe $= n°$ colonne $\Rightarrow$ biettiva.

Devo trovare A:

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,-1)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (2,k,2)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,1,k)$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k-4 & 1 \\ 0 & 4 & k \end{pmatrix}$$

$rg A = 3$ se $\det A \neq 0$ $\quad k(k-4) - 4 = 0 \quad k^2 - 4k - 4 = 0 \quad k = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{1} = 2 \pm \sqrt{8}$

f isomorfismo se $k \neq 2 \pm 2\sqrt{2}$.

• $f : V \longrightarrow V \quad \dim V = n$

f iniettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ teorema nullità + rango
$n = 0 + \dim \operatorname{Im} f$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = n \Rightarrow \operatorname{Im} f = V$

f suriettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V = n \Rightarrow n = \dim \operatorname{Ker} f + n \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f =$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ iniettiva.

• Siano V e W spazi vettoriali e L, T due applicazioni lineari da V a W.
Sia $A := \{v \in V : L(v) = T(v)\}$ e $B := \{v \in V : L(v) = -T(v)\}$

1) Dimostrare che A e B sono SSV di V
2) Dimostrare che $A \cap B = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} L$

1) A

$\forall v_1, v_2 \in A, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 \in A$

$v_1 \in A \Rightarrow L(v_1) = T(v_1)$ $\quad L(a_1 v_1 + a_2 v_2) \overset{L \text{ lineare}}{=} a_1 L(v_1) + a_2 L(v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$

$v_2 \in A \Rightarrow L(v_2) = T(v_2)$

T lin.
$= T(a_1 v_1 + a_2 v_2) \Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 \in A \Rightarrow A$ è SSV

(B) Stesso procedimento

2) $w \in A \cap B \Leftrightarrow w \in A$ e $w \in B \Leftrightarrow L(w) = T(w)$ e $L(w) = -T(w)$

$\Rightarrow T(w) = -T(w) \Rightarrow$ l'unico numero/vettore che è uguale al suo opposto è il vettore nullo. $T(w) = 0$

$\left.\begin{array}{l} w \in \operatorname{Ker} L \\ w \in \operatorname{Ker} T \end{array}\right\} \Rightarrow w \in \operatorname{Ker} L \cap \operatorname{Ker} T$

- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $T(1,0,1) = (-1,0,1)$ $\quad T(x,y,z) = ?$
$T(1,1,0) = (0,3,3)$
$T(0,1,1) = (-2,2,0)$

$f: U \to V$ Base di $U = \{u_1, u_2, \dots u_n\} \to f(u_1) = \dots$
$\vdots$
$f(u_n) = \dots$

T è un'applicazione lineare se sono una base, cioè se sono l.i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

det $= 2 \Rightarrow rg = 3$
$\Rightarrow$ vettori l.i. $\Rightarrow$ base
$\Rightarrow T$ è un'applicazione lineare

$$\begin{cases} T(1,0,1) = T(e_1+e_3) = (-1,0,1) & T(e_1) = ? \\ T(1,1,0) = T(e_1+e_2) = (0,3,3) & T(e_2) = ? \\ T(0,1,1) = T(e_2+e_3) = (-2,2,0) & T(e_3) = ? \end{cases}$$

Ma T è lineare, quindi

$$\begin{cases} T(e_1) + T(e_3) = (-1,0,1) \\ T(e_1) + T(e_2) = (0,3,3) \\ T(e_2) + T(e_3) = (-2,2,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} T(e_1) = (-1,0,1) - T(e_3) \\ (-1,0,1) - T(e_3) + T(e_2) = (0,3,3) \\ T(e_2) + T(e_3) = (-2,2,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(e_1) = (-1,0,1) - T(e_3) \\ T(e_2) - T(e_3) = (1,3,2) \\ T(e_2) + T(e_3) = (-2,2,0) \end{cases} \xrightarrow{+} 2T(e_2) = (-1,5,2) \rightarrow T(e_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

$$\begin{cases} T(e_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right) \\ T(e_3) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \\ T(e_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \end{cases} \quad A_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z \\ 2x + y - z \end{bmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 16/3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{16}{3} = 8 \neq 0 \quad \text{rg} A = 3$$

$$\text{Im} L = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\text{Ker} L =$ riduco A a gradini e trovo le soluzioni:

17/11/2003

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ker}\, T = \{0\} \quad \dim \text{Ker}\, T = 0$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}\, T + \dim \text{Im}\, T \qquad \dim \text{Im}\, T = 3$$
$$3 = 0 + ?$$

$\text{Im}\, T \subseteq \mathbb{R}^3$ ma $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im}\, T \Rightarrow \text{Im}\, T = \mathbb{R}^3$

Scrivere x^3 come combinazione lineare di $\{(x-1)^k, k=0,1,2,3\}$ nello spazio $\mathbb{R}[x] \rightarrow$ tutti i polinomi.

$K=0 \rightarrow (x-1)^0 = 1$

$K=1 \rightarrow (x-1)^1 = x-1$

$K=2 \rightarrow (x-1)^2 = x^2-2x+1$

$K=3 \rightarrow (x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$

$$a \cdot 1 + b(x-1) + c(x^2-2x+1) + d(x^3-3x^2+3x-1) = x^3$$

$$dx^3+x^2(c-3d)+x(b-2c+3d)+a-b+c-d = x^3$$

$$\begin{cases} d=1 \\ c-3d=0 \\ b-2c+3d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=1 \\ c=3 \\ b=3 \\ a=1 \end{cases} \qquad x^3 = 1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$$

I coefficienti sono unici perché i polinomi sono linearmente indipendenti.

Infatti, $dx^3+x^2(c-3d+x(b-2c+3d)+a-b+c-d=0$ ha solo la sol. nulla:

$$\begin{cases} d=0 \\ c-3d=0 \\ b-2c+3d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Siamo nello spazio $M_{2\times2}$. Considero $W=\{A \in M_{(2\times2,\mathbb{R})} : \underset{\downarrow}{tr}\, A = 0\}$. Dimostra che è un s.s.v.

somma elementi diagonale

- $0 \in W \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$? sì, perché traccia $=0$.
- $A \in W \rightarrow tr A = 0$ $\quad (A+B) \in W$? $\quad (A+B) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

  $B \in W \rightarrow tr B = 0$

  $tr(A+B) = a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22} = (a_{11}+a_{22})+(b_{22}+b_{11}) = trA + tr B = 0$ SI
- $KA \in W$? $\quad KA = \begin{pmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} \\ Ka_{21} & Ka_{22} \end{pmatrix} \quad tr(KA) = Ka_{11}+Ka_{22} = K\underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{trA} = 0$ SI

Lo stesso valeva per $M_{n\times n}$.
Se fosse stato $M_{n\times n}$ in cui $a_{ij} \in \mathbb{C}$, non sarebbe cambiato nulla perché abbiamo usato le proprietà commutativa e associativa che valgono su ogni campo K (e quindi anche su $\mathbb{C}$).

Trova un sottospazio U di $\mathbb{R}$ tale che $M = W \oplus U$

$\oplus$ somma diretta

$$W = \{A \in M_{n\times n, \mathbb{C}} : trA = 0\} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dimensione n^2

Per appartenere a W ho un'unica richiesta, che quindi è l'equazione cartesiana di W:

$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = 0$

Ho 1 equazione in n incognite $\Rightarrow \dim W = n-1$.

$$\underset{n^2-1}{\dim W} + \underset{?}{\dim U} = \underset{n^2}{\dim M} \qquad \dim U = 1$$

generato da una sola matrice (basta non stia in W)

$\oplus \rightarrow$ ciò che sta in U non deve stare in W e $U+W$ devono coprire M.

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}\right)$$ ad esempio (basta che $tr \neq 0$)

Provo che ogni matrice $n \times n$ (considero 2×2) sia scrivibile come combinazione lineare di U e W.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \qquad TrA = a_{11} + a_{22}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} - trA & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in W \qquad TrA' = a_{11} - trA + a_{22} = 0$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} - trA & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} trA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in U}$$

$V = M(m\times n, \mathbb{C})$ fisso $P \in V$

$T: V \longrightarrow V$ Dimostrare che T è un operatore

$T(A) = P\cdot A$

1. $T(0)=0$ $\qquad T(0) = P\cdot 0 = 0$ ✓
2. $T(A+B) = T(A)+T(B)$ $\qquad T(A+B) = P(A+B) \underset{\uparrow}{=} P\cdot A + P\cdot B = T(A)+T(B)$ ✓
3. $T(KA) = K\,T(A)$ con $K\in\mathbb{C}$ $\qquad T(KA) = P(KA) = K\,P(A) = K\,T(A)$ ✓

distributiva

Dimostrare che T è iniettiva se e solo se P è non singolare.

P non singolare $\overset{?}{\longrightarrow}$ T iniettiva

Suppongo per assurdo che $\exists\, A,B \in V$ tali che $T(A)=T(B)$

$$P\cdot A = P\cdot B \underset{\substack{\det P\neq 0\\ \exists P^{-1}}}{\Longleftrightarrow} P^{-1}\cdot P\cdot A = P^{-1}P\cdot B \Longleftrightarrow A=B$$

$\Rightarrow T$ è iniettiva.

Viceversa: suppongo T iniettiva e dimostro che P è non singolare.
Essendo T un operatore, uso il teorema di nullità più rango:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} T + \underset{\substack{\parallel\\ 0 \text{ perché iniettiva}}}{\dim \operatorname{Ker} T}$$

$\dim V = \dim \operatorname{Im} T \underset{\text{operatore}}{\Longrightarrow} V = \operatorname{Im} T \Longrightarrow T$ è suriettiva

Qualunque matrice è ottenuta come immagine di qualcuno.
Prendo l'identità I: $\exists\, A\in V$ tale che $T(A) = I \Rightarrow P\cdot A = I$

$\det P \cdot \det A = \det I = 1 \qquad \det P$ e $\det A \neq 0$ ☒

Vale in tutti i campi l'annullamento del prodotto $\Rightarrow P$ non singolare

Dimostrare che componendo due omomorfismi si ottiene ancora un omomorfismo e che se l'omomorfismo è biettivo, anche l'inversa è un omomorfismo.

$T: V \longrightarrow W$

$L: W \longrightarrow U$

$$L(T(v)) = L \circ T(v)$$

Prendo $v \in V$, $w = T(v) \in W$, $L(w) \in U$

1) $L \circ T(0) = L(T(0)) = L(0) = 0$ ✓ perché $T(0) = L(0) = 0$ essendo T e L applicazioni lineari.

2) $L \circ T(v_1 + v_2) = L(T(v_1 + v_2)) = L(T(v_1) + T(v_2)) = L(T(v_1)) + L(T(v_2)) =$

$= L \circ T(v_1) + L \circ T(v_2)$ ✓

3) $L \circ T(kv) = L(T(kv)) = L(kT(v)) = kL(T(v)) = k \cdot L \circ T(v)$ ✓

È vero che la composta di due applicazioni lineari è un'appl. lineare

T è biettiva, so che esiste T^{-1}, quindi $T(v) = w$ e $T^{-1}(w) = v$.

$T(T^{-1}(w)) = w$ e $T^{-1}(T(v)) = v$

Voglio dimostrare che $T^{-1}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T^{-1}(v_1) + a_2 T^{-1}(v_2)$.

$T^{-1}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = ?$ Ma vedo che $T(T^{-1}(a_1 v_1 + a_2 v_2)) = a_1 v_1 + a_2 v_2$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_1 \cdot T(T^{-1}(v_1)) + a_2 T(T^{-1}(v_2)) \underset{T \text{ è lin.}}{=} T(a_1 T^{-1}(v_1)) + T(a_2 T^{-1}(v_2)) =$

$\underset{T \text{ lin.}}{=} T(a_1 T^{-1}(v_1) + a_2 T^{-1}(v_2))$

quindi, se guardo "l'argomento" da cui sono partito, vedo

$T^{-1}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T^{-1}(v_1) + a_2 T^{-1}(v_2)$ che è esattamente quello che volevo dimostrare. $\Longrightarrow T^{-1}$ è un omomorfismo.

$C = (e_1, e_2)$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2) \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = (w_1, w_2) \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) $[u]_{\mathcal{B}}$, $[u]_{\mathcal{B}'}$ $\quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

2) $M(C, \mathcal{B})$, $M(C, \mathcal{B}')$?

3) $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

1) $u = a v_1 + b v_2 \qquad [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+2b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} b = 3 \\ a = -8 \end{cases} \qquad [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$[u]_{\mathcal{B}'}$: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 3b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a = -3 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \qquad [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

2) So che $M(C, \mathcal{B}) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [v]_C$; siccome sono in $\mathbb{R}^2$ sia in partenza che in arrivo, $M(C, \mathcal{B}) \in M_{2\times2}$.
L'ho già fatto prima. Infatti:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{componenti in base } \mathcal{B}} = [v]_C \qquad$ quindi $\quad M(C, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [v]_C \qquad$ quindi $\quad M(C, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) $M(\mathcal{B}, \underset{v_i \in \mathcal{B}'}{\mathcal{B}'}) = \left([v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}, \dots \right) = \left([w_1]_{\mathcal{B}}, [w_2]_{\mathcal{B}} \right)$

$w_1 = a v_1 + b v_2$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a+2b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases} \quad [w_1]_B = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$w_2 = a v_1 + b v_2$

$$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a+2b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=3 \end{cases} \quad [w_2]_B = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$M(B,B') = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Le matrici del cambiamento di base sono sempre quadrate
- La matrice del cambiamento di base è sempre non singolare ($\det \neq 0$)
- Se $\det \neq 0$, allora $\exists$ la matrice inversa $M(B,B') \Rightarrow M(B,B')^{-1} = M(B',B)$.

Calcolo $M(B',B)$ e verifico che $M(B',B) = M(B,B')^{-1}$

$$M(B',B) = \left([v_1]_{B'}, [v_2]_{B'}\right)$$

$v_1 = a w_1 + b w_2$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\3b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1/3 \end{cases} \quad [v_1]_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1/3\end{pmatrix}$$

$v_2 = a w_1 + b w_2$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\3b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2/3 \end{cases} \quad [v_2]_{B'} = \begin{pmatrix}-1\\2/3\end{pmatrix}$$

$$M(B',B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$ Verifico che

$$M(B',B)\cdot M(B,B') = I_d \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ok

$$M(C,B') = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M(B',B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Verificare che $M(C,B') \cdot M(B',B) \cdot M(B,C) = Id$

$$M(B,C) = M^{-1}(C,B) = \frac{1}{det} \cdot \begin{pmatrix} \text{complemento} \\ \text{algebrico} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M(B,C)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{OK}$$

$B = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad B$ è base di $\mathbb{R}^3$?

Esprimere i vettori di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 4 + 6 = 10 \neq 0$ vettori linearmente indipendenti e gener.

$\Rightarrow B$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} a+b \\ 2b-3c \\ -a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a+b=1 \\ 2b-3c=0 \\ -a+b+2c=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad rg = 3$$

MATRICE COMPLETA

Oppure: considero e_2 e e_3

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tre matrici uguali con l'ultima colonna diversa. Stessi calcoli.

Gestire tre sistemi contemporaneamente.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$[e_1]_B \; [e_2]_B \; [e_3]_B$

$$[e_1]_B \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2b-3c=0 \\ 5c=1 \end{cases} \quad \dots$$

Oppure trasformo la parte dei coefficienti in modo da avere un'incognita per riga, magari uguale a 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \overset{\oplus}{\underset{\times 3}{}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \overset{/2}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$[e_2]_B \quad [e_3]_B$

$$[e_1]_B \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{10} \\ b=\frac{3}{10} \\ c=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$[v]_B = \overset{?}{P} \cdot [v]_C$$

$$P = M(B,C) = \left([e_1]_B, [e_2]_B, [e_3]_B\right) = \begin{pmatrix} 7/10 & -1/5 & -3/10 \\ 3/10 & 1/5 & 3/10 \\ 1/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}\right)$$

a) $M(B,C)$ e $M(C,B)$?

b) $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $[v]_C = [v]_B$

$$M(\mathcal{B},C) = \left([e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}, [e_3]_{\mathcal{B}}\right)$$

$$M(C,\mathcal{B}) = \left([v_1]_C, [v_2]_C, [v_3]_C\right) \underset{\text{ce l'ho già}}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\mathcal{B},C) = M^{-1}(C,\mathcal{B}) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & -1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M(\mathcal{B},C)}$$

b)
$$[v]_C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(C,\mathcal{B}) \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 2x \\ y = -x - y + 2z \\ z = -x + z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z \text{ arbitraria} \\ y = z \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 1

$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad L(x,y) = (2x, x+y, 2y)$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

canonica di $\mathbb{R}^3$

1) Scrivere $M(C, \mathcal{B})$ e $M(C', \mathcal{B}')$

2) Scrivere $M_L(C, C')$

3) Scrivere $M_L(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

1) $M(C,\mathcal{B}) = \left([v_i]_C \right) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \qquad M(C', \mathcal{B}') = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

2) $M_L = \left(\underbrace{[L(v_1)]}_{\text{vettori della base di partenza}}{}_{B \leftarrow \text{base di arrivo}} \right) \Rightarrow M_L(C, C') = \left([L(e_1)]_{C'}, [L(e_2)]_{C'} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$L(e_1) = L(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L(e_2) = L(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono già nella base canonica dello spazio di arrivo

3) $M_L(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left([L(v_i)]_{\mathcal{B}'} \right)$

$L(v_1) = L(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad L(v_2) = L(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[L(v)]_{\mathcal{B}'} = ? \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2b + c = 3 \\ a + 2c = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \cancel{4} - \cancel{4} + 4c \\ 2b + c = 3 \\ a = 2 - 2c \end{cases}$

$\begin{cases} c = 1/3 \\ b = 4/3 \end{cases} \qquad [L(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

$[L(v_2)]_{B'} = ?$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ $\begin{cases}2a+b=2\\2b+c=1\\a+2c=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1/3\\b=2/3\\c=2/3\end{cases}$

$$[L(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

$$M_{B,B',L} = \begin{pmatrix}4/3 & -1/3\\4/3 & 2/3\\1/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

$L: \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $R_1[x]$ polinomi di grado ≤ 1

$L(a+bx) = (-a, b+a, 7b)$

1) $\operatorname{Ker} L$? $\operatorname{Im} L$?
2) $M(C,C') = ?$
3) Date $B = (1-x, 3+2x)$ base di $R_1[x]$

$B' = (e_3, -e_2, e_1)$ base di $\mathbb{R}^3$

$M(B,B') = ?$

1) $\operatorname{Ker} L : \left\{ a+bx \;\middle|\; \begin{pmatrix}-a\\b+a\\7b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix}a=0\\b=0\end{matrix}$ $\operatorname{Ker} L = 0$ applicazione iniettiva

$\operatorname{Im} L : \begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\7b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}\right)$ ha dimensione 2, essendo $< 3 = \dim \mathbb{R}^3$, non è suriettiva

2) $C_{\mathbb{R}_1[x]} = (1, x)$ $C_{\mathbb{R}^3} = (e_1, e_2, e_3)$

$L(1) = L(\underset{a}{1} + \underset{b}{0}\cdot x) = (-1, 1, 0)$ $L(x) = L(0 + 1\cdot x) = (0, 1, 7)$

$$M(C,C') = \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\\0 & 7\end{pmatrix}$$

3) $L(1-x) = (-1, 0, -7)$ $\quad [L(1+x)]_{B'}$? $\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}c=-1\\b=0\\a=-7\end{cases}$

$[L(1-x)]_{B'} = \begin{pmatrix}-7\\0\\-1\end{pmatrix}$

$L(3+2x) = (-3, 5, 14)$ $\quad \begin{pmatrix}-3\\5\\14\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}c=-3\\b=-5\\a=14\end{cases}$

$[L(3+2x)]_{B'} = \begin{pmatrix}14\\-5\\-3\end{pmatrix}$ $\quad M(B, B', L) = \begin{bmatrix}-7 & 14\\0 & -5\\-1 & -3\end{bmatrix}$

$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow M(2\times 2, \mathbb{R})$

$L(a,b,c) = \begin{pmatrix}a & a+b\\a+b+c & 0\end{pmatrix}$ Esprimere M_L rispetto alle basi canoniche e trovare l'immagine.

$C = (e_1, e_2, e_3)$

$C' = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ $\quad E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$L(e_1) = L(1,0,0) = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$L(e_2) = L(0,1,0) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

$L(e_3) = L(0,0,1) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad M(L) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

L'immagine di L è fatta da matrici. Prendo i vettori di una base di $\mathbb{R}^3$ e trovo le loro immagini

$\operatorname{Im}(L) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$ Sono linearmente indipendenti?

$a\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases}a=0\\a+b=0\\a+b+c=0\\0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}a=0\\b=0\\c=0\end{matrix}$ SI

$V \subseteq M(2\times 2, \mathbb{R}) \qquad A \in V \Leftrightarrow \operatorname{tr} A = 0$

$\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3) \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Base?

$L\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & x_3 \\ x_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$ M_L? Rispetto a $\mathcal{B}$...

Verifico l'indipendenza: $aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0 \qquad \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \Rightarrow$ OK

Sono generatori? Prendo la generica matrice e vedo se riesco a scriverla come combinazione lineare:

$\begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$ SI perché $\begin{matrix} c = x_1 \\ b = x_3 \\ a = x_2 \end{matrix}$

Prendo i vettori di $\mathcal{B}$, trovo le immagini e scrivo le coordinate

$L(A_1) = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3 = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

$L(A_2) = L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} = A_1$

$L(A_3) = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B},L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MAPPA $\rightarrow$ funzione (generale)

APPLICAZIONE LINEARE $\rightarrow$ mappa che preserva somma e prodotto per scalare

1/12/09

4.3

$V = M(2\times 2, \mathbb{R}) \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) $T: V \to V$, $T(A) = P \cdot A \cdot P^T$ dimostrare $\forall A \in V$ che è un operatore

2) data B base di V scrivere $M(B,T)$

3) l'operatore è invertibile? iniettivo? suriettivo

1) $T(A+B) = T(A) + T(B)$

$T(KA) = KT(A)$

$$T(A+B) = P \cdot (A+B) \cdot P^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma distributiva}}}{=} (PA+PB)P^T = PAP^T + PBP^T = T(A) + T(B)$$

$$T(KA) = P(KA)P^T = KPAP^T = KT(A)$$

2) $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$$T(E_{11}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

$$= 4E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \Rightarrow \text{prima colonna di } M(B,T) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(E_{12}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 2E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

seconda colonna $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 0E_{12} + 2E_{21} + 0E_{22}$$

$$T(E_{22}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 1E_{22}$$

$$M(B,T) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice non singolare $\Rightarrow$ iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ invertibile

Costruire una applicazione lineare tale che $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1) $\dim \operatorname{Ker} T = 1$
2) $(1,1,1)$ autovettore v
3) T diagonalizzabile

Devo trovare una base. Prendo v, e_1, e_2 come vettori:

$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una base? Non singolare, sì.

$T(e_1) = (0,0,0)$ perché $\dim \operatorname{Ker} T = 1$ quindi non ha solo il vettore nullo

$T(e_2) = (1,1,0)$ provo!

$T(v) = (2,2,2)$ provo!! Dovrà essere comunque (K,K,K)

È diagonalizzabile?

$M_T \left(T(e_1), T(e_2), T(e_3)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Io so che $T(v) = T(1,1,1) = (2,2,2)$ ma $(1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$

$T(v) = T(e_1) + T(e_2) + T(e_3) = (2,2,2) \Rightarrow T(e_3) = (1,1,2)$

La matrice è triangolare, pertanto gli autovalori sono $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$
imposto io

Trovo gli autospazi:

$V_0 = \mathcal{L}(e_1)$
vettore che dà $(0,0,0)$

$V_2 = \mathcal{L}(v)$

$V_1 : \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]}_{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}(e_2) \Longleftarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$

T è diagonalizzabile

Se una applicazione lavora su $\mathbb{R}^n$ e ha n autovalori reali e distinti, è diagonalizzabile

Data un'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, trovare gli autovalori, verificare che $\exists$ $\mathcal{B}$ formata da autovettori e dire se è unica, dire se l'applicazione è diagonalizzabile, determinare P con $\det P \neq 0$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P =$ diagonale.

AUTOVALORI : $\det(A - \lambda Id) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 3\right] = (2-\lambda)(\cancel{3} + \lambda^2 - 4\lambda \cancel{-3}) =$$

$$= 2\lambda^2 - 8\lambda - \lambda^3 + 4\lambda^2 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 8\lambda$$

$$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \qquad \lambda = 0 \quad \lambda = 2 \quad \lambda = 4$$

AUTOVETTORI

V_0: $(A - 0 \cdot I) \cdot v = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$$V_0 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

V_2: $(A - 2I) v = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_1 = \frac{4}{3} x_3 \end{cases}$

$$V_2 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4/3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

V_4: $(A - 4I) v = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$$V_4 = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono generatori? sì

sono lin. ind.?

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \quad \det \neq 0 \Downarrow \text{lin. indip.}$$

B è una base formata da autovettori e non è unica

L è diagonalizzabile perché ho trovato una base formata da autovettori

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det P \neq 0 \qquad D = \text{diagonale} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

autovalore di questo autospazio

Per verificare i conti deve valere $P^{-1}AP = D$ oppure $AP = P \cdot D$

$\boxed{4.9}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) autovalori e autovettori?
2) trovare P tale che $P^{-1}AP = \text{Diag}$.
3) calcolare A^{30}

1) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

$V_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ y=y \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y \\ y=y \end{cases} \quad V_1 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ y=y \end{cases} \quad V_3 = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\underset{-2}{\det P}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +3 \end{pmatrix}$

3) So che x le matrici diagonali la 30ª potenza è la 30ª potenza dei suoi elementi: Ma:

$D^{30} = (P^{-1}AP)^{30} = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \overset{\text{assoc.}}{=} P^{-1}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I}A\underbrace{(PP^{-1})}_{I}\cdots AP =$

$= P^{-1} \cdot A^{30} \cdot P$

$\boxed{PD^{30}P^{-1} = A^{30}}$

$A^{30} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 3^{30} \\ 1 & 3^{30} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1-3^{30} & 1-3^{30} \\ 1-3^{30} & -1-3^{30} \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+3^{30}}{2} & \frac{3^{30}-1}{2} \\ \frac{3^{30}-1}{2} & \frac{1+3^{30}}{2} \end{pmatrix}$

ES 13.1 G.A. → base ortonormale → vettori ortogonali $(\langle , \rangle = 0)$ di norma 1

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \qquad v_{\text{ORTONORMALE}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

ES 4.8. G.B.